

Матбой 7-10, вариант 3

1. В треугольнике ABC $\angle A = 70^\circ$, $\angle B = 80^\circ$. Внутри треугольника взята точка M такая, что $\angle ACM = 10^\circ$, $\angle MBC = 20^\circ$. Докажите, что $CM = AB$.
2. Восемь шахматистов сыграли турнир в один круг. Давали 1 очко за победу, 0,5 очка за ничью, 0 за поражение. После этого они же разыграли кубок по олимпийской системе: разбились на пары, проигравшие выбыли, выигравшие снова разбились на пары, и т.д. Все кубковые встречи закончились так же, как встречи тех же игроков в турнире, ничьих не было. Могло ли случиться, что кубок выиграл шахматист, набравший в турнире меньше всех очков?
3. Для натуральных чисел a , b , c известно, что a^b делится на b^a , а b^c делится на c^b . Докажите, что a^c делится на c^a .
4. Имеется 200 картонных фигур: квадратов и треугольников (возможно, есть фигуры только одного типа). Нужно один раз разрезать одну фигуру по прямой на две части, и затем разложить все фигуры на три кучки. Докажите, что так можно добиться, чтобы суммарное число углов в кучках стало одинаковым (у треугольника три угла, у квадрата или прямоугольника — четыре, у пятиугольника — пять и т.д.).
5. На доске написаны числа 1, 2, 3, ..., 100. Петя и Вася играют, начинает Петя. Каждым ходом надо стереть восемь чисел с суммой 404. Кто не может сделать ход, проиграл. Кто из игроков может выиграть, как бы ни играл соперник?
6. Юра по одной выставляет ладьи на пустые клетки доски 5×5 . За каждую ладью, которая в момент выставления может побить ладей не меньше, чем пустых полей, Юра получает рубль. Какое наибольшее количество рублей сможет заработать Юра? (Ладья бьет другую ладью или клетку, если между ними нет других ладей.)
7. Оле дали число x , записанное как обыкновенная дробь с однозначным знаменателем. Числа $2x$, $4x$ и $5x$ оказались не целыми и не полуцелыми. Она округлила каждое из них до ближайшего целого и результаты сложила. Получилось 120. Найдите x .
8. 49 точек на окружности занумерованы (возможно, в беспорядке) нечетными числами 3, 5, 7, ..., 99. Если один номер делится на другой, точки соединяются хордой. Докажите, что найдутся хорды, пересекающиеся внутри круга.