Матбой 7-10, вариант 1

1. Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием AB и углом A=50°. Внутри треугольника ABC взята такая точка K так, что $\angle KBA$=30°, $\angle KAB$=10°. Найдите $\angle AKC$.
2. Для натуральных чисел a, b, c известно, что a^b делится на b^a, а b^c делится на c^b. Докажите, что a^c делится на c^a.
3. Имеется 200 картонных фигур: квадратов и треугольников (возможно, есть фигуры только одного типа). Нужно один раз разрезать одну фигуру по прямой на две части, и затем разложить все фигуры на три кучки. Докажите, что так можно добиться, чтобы суммарное число углов в кучках стало одинаковым (у треугольника три угла, у квадрата или прямоугольника — четыре, у пятиугольника — пять и т.д.).
4. На поверхности куба с ребром 1 м нарисована замкнутая несамопересекающаяся ломаная с вершинами на ребрах куба. Все её звенья, лежащие на одной и той же грани, параллельны между собой. Может ли длина ломаной быть больше 1 км?
5. Оле дали число x, записанное как обыкновенная дробь с однозначным знаменателем. Числа $2x$, $4x$ и $5x$ оказались не целыми и не полуцелыми. Она округлила каждое из них до ближайшего целого и результаты сложила. Получилось 120. Найдите x.
6. По кругу стоят 64 шашки нескольких цветов так, что шашки одинакового цвета рядом не стоят. Докажите, что все шашки можно расставить по одной на поля шахматной доски так, чтобы шашки в каждом двуклеточном прямоугольнике были разных цветов.
7. Пусть P – произведение первых 73 простых чисел. Докажите, что любое натуральное число, меньшее P может быть представлено как сумма нескольких различных натуральных делителей P.
8. Четыре байкера ездят по круглому шоссе по часовой стрелке с различными постоянными скоростями. У них есть вымпел, который обязательно передается от одного к другому при встрече или обгоне (ситуаций, когда трое или четверо оказываются одновременно в одном месте, не случается). Может ли оказаться, что как бы долго они не ездили, к двум из них вымпел так и не попадет?

Малый мехмат, 7 и 10 классы, 15 июля 2018 г, http://www.ashap.info/Uroki/Bolgar2/2018/7-1/index.html