Обратная цепочка

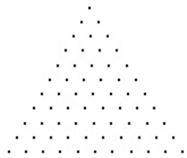
Лесенку, по которой надо пройти, можно строить и с конца.

0. С натуральным числом разрешены две операции: #) приписать на конце цифру 2; :) разделить на 2 (это можно делать только для четных чисел).
Например, если с числом 6 проделать последовательно операции #:#, получим 312.
Можно ли такими операциями из числа 2 получить 18?

1. У Пети было двузначное число. Каждым ходом он его уменьшал: когда число было составным, он заменял его на один из делителей, иначе уменьшал на 1. Мог ли Петя получить 0 ровно за 10 ходов?

Начните с шага, который сведёт задачу к меньшей, скажем, уменьшит параметр задачи на 1.

2. На плоскости отмечены 66 точек (см. рис). Докажите, что
а) любые 65 из них можно зачеркнуть 10-ю прямыми;
б) все 66 точек 10 прямыми зачеркнуть нельзя.



3. На кольцевой шнур нанизана связка колец разного размера номерами от 1 до 20 по порядку. Два рядом находящихся кольца можно поменять местами, если их номера колец отличаются на 2 или больше. Кольца с соседними номерами так поменять нельзя. Докажите, что кольца можно расположить в порядке 1, 2, 3, …, 20, считая по часовой стрелке от кольца номер 1.

Построив цепочку шаг за шагом «задом наперед», подумайте, нет ли простого правила для её прохода в правильном порядке.

4. Артём знает список из 33 городов страны Оз и знает, что каждая пара городов соединена отдельной дорогой с односторонним движением. За один вопрос он может про любую пару городов узнать в какую сторону ведёт дорога между ними. Как ему за 32 вопроса найти город, в который можно добраться из любого другого (возможно, через другие города)?

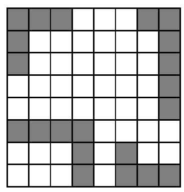
Если ситуация в задаче не конкретная, а общая (произвольная ситуация такого-то вида), то последний шаг часто находят по принципу крайнего.

5. На шахматной доске стоит несколько ладей. Докажите, что их можно раскрасить в 3 цвета так, чтобы ладьи одинакового цвета друг друга не били. (Ладьи бьют друг друга, если стоят на одной горизонтали или вертикали и между ними нет других ладей).

6. Наташа вступила в группу в соцсети. Оказалось, что между любыми двумя участниками группы сообщение можно передать по цепочке от друга к другу. Докажите, что всех в группе можно занумеровать по порядку так, чтобы у каждого, кроме Наташи, нашёлся хотя бы один друг, чей номер – больше.

Зачётные задачи

ОЦ1. Клетчатый шестиугольник, составленный из двух полосок ширины 1, назовём *уголком* (см. примеры серых уголков на рисунке). Докажите, что произвольный клетчатый квадрат без любой клетки можно разбить на клетчатые уголки с различным нечётным числом клеток.



ОЦ2. С натуральным числом разрешены две операции: #) приписать на конце цифру 2; :) разделить на 2 (Б можно делать только для четных чисел).
Например, если с числом 6 проделать последовательно операции #, :, #, получим 312.
Можно ли разрешенными операциями задачи 1 из числа 2 получить **а)** 2018; **б)** 13?
ОЦ3. В клетках квадратной таблицы 10×10 клеток стоит ровно 9 нулей и проведена диагональ из левого верхнего в правый нижний угол. Можно переставлять столбцы и строки вместе с их содержимым. Докажите, что можно добиться, чтобы все нули лежали под диагональю.
ОЦ4. Есть 128 монет двух различных весов, монет каждого веса поровну. Как на чашечных весах без гирь гарантированно найти две монеты *разного* веса не более чем за 7 взвешиваний?