Свойства частичных конструкций и «путь на эшафот»

При постепенном конструировании выбираем промежуточные конструкции или позиции с определенным свойством. Хорошо, если и у цели такое же свойство.
В играх при стратегии «Путь на эшафот» есть дорожка из позиций, ведущая к поигрышу; победитель ведёт соперника по этой дорожке, возвращая на дорожку при любом шаге вправо-влево от дорожки. Более формально: выделяется подмножество позиций П. Они включают и финальные позиции, где тот, чья очередь хода, немедленно проигрывает. Из остальных позиций П ход ведёт вне П, но стратегия победителя дает возможность ответным ходом вернуть проигрывающего в П, причем в позицию более близкую к финальной. Обычно П выделяется с помощью некоторого свойства, дорожка — это только часть П, алгоритм – стратегия победителя.

1. Вначале на доске написано число 2018. Каждым ходом число можно уменьшить на любую из его ненулевых цифр (например, из 2018 можно получить 2018-2=2016, 2018-1=2017 и 2018-8=2010). Аня и Боря ходят по очереди, начинает Аня. Кто получит однозначное число, проигрывает. Кто из игроков может выиграть, как бы ни играл соперник?

Условие задачи накладывает на её элементы много ограничений. Надо оставить только те, что нам нужны, но зато уж поддерживать и сохранять их в процессе построения.

2. На каждой клетке доски 20x20 лежит по карточке с числом. В каждой паре соседей (клеток с общей стороной) числа – разные. Докажите, что карточки можно переложить в клетки полоски 2x200 так, чтобы по-прежнему в каждой паре соседей числа были разными.

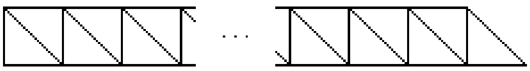
В примере 1 множество П и даже весь путь состояли из всех проигрышных позиций, и их можно было перечислить. Гораздо чаще и путь, и П составляют лишь подмножество проигрышные позиции, а рассмотреные позиции — лишь окрестность П. Описание П с помощью свойства значительно упрощает работу.

3. В ряд лежат 100 монет орлами вверх. Петя и Вася ходят по по очереди, начинает Петя. Проигрывет тот, кто не может ходить. За ход разрешается выбрать две монеты орлами вверх, между которыми лежат ровно 2 или ровно 3 монеты, и перевернуть выбранные монеты. Кто из игроков может выиграть, как бы ни играл соперник?

4. На доске записаны 100 нецелых слагаемых, их сумма – целое число. Каждое слагаемое можно округлить до любого из двух ближайших целых (например, 3,14 можно округлить как до 3, так и до 4). Докажите, что можно округлить все слагаемые так, чтобы сумма не изменилась.

5. 30 учеников идут парами, в каждой паре ученики разного роста. Докажите, что они могут стать в круг так, чтобы рост каждого отличался от роста его соседей.

6. Из 55 треугольников сложена полоска (см. рис.). Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За ход игрок красит неокрашенную сторону треугольника в красный или синий цвет по своему усмотрению. Нельзя красить так, чтобы у какого-то из треугольников все стороны стали одинакового цвета. Кто не может сделать ход – проиграл. Кто из игроков может выиграть, как бы ни играл соперник?



7. На окружности отмечено 300 точек: по 100 точек синего, красного и зелёного цветов. Докажите, что можно провести 150 отрезков с концами в этих точках, соблюдая такие правила: 1) никакие два отрезка не пересекаются (даже в концах); 2) концы каждого отрезка — разного цвета.

Зачётные задачи

СЧ1. В 10 одинаковых стаканов разлит квас, каждый заполнен не более, чем на 10%. За одну операцию можно выбрать стакан и отлить из него любое количество кваса поровну в остальные стаканы. Докажите, что не более чем за 10 таких операций можно добиться, чтобы во всех стаканах кваса стало поровну.
СЧ2. Петя и Вася ходят по очереди на доске 8x7, каждый своей ладьей; начинает Петя. Вначале ладьи стоят в противоположных углах, а все остальные поля заполнены пешками. Каждым ходом ладья должна что-нибудь съесть – пешку или ладью противника (ладьи ходят по вертикали или горизонтали на любое расстояние, но через занятые поля не перепрыгивают). Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход. Кто из игроков может выиграть как бы ни играл соперник?

СЧ3. На доске написаны числа от 1 до 666. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За один ход нужно заменить любые два числа на их сумму. Игра заканчивается, когда на доске останутся два числа. Петя хочет добиться, чтобы одно из них делилось на другое. Может ли Вася ему помешать?

СЧ4. В ряд лежат 100 гирь, их веса в граммах – целые, общий вес – чётный. Левая гиря весит 1г, следующая – не более 2 г, следующая – не более 3 г, и т. д. Докажите, что все гири можно разбить на две кучки равного веса.