

Уравнение за кадром

Полезно посчитать что-нибудь двумя разными способами (чаще всего это – общая сумма). Если результаты выглядят по-разному, то может получиться либо противоречие (значит, такого не бывает), либо уравнение (и решив его, найдем неизвестное). Вообще, в нестандартных задачах важнее правильно составить уравнение, чем его решить.

1. а) В школьной олимпиаде по математике участвовало 80 человек, по физике – 55, по информатике – 45. Составили три списка: тех, кто участвовал ровно в одной из олимпиад, ровно в двух, ровно в трех. Во всех списках одно и то же число людей. Сколько человек в каждом списке?
- б) А могло ли при тех же условиях по математике участвовать 100 человек?
2. а) Представьте бесконечную десятичную дробь $20,18181818\dots$ как обыкновенную.
- б) Докажите, что всякая периодическая десятичная дробь равна частному от деления двух целых чисел.

При составлении уравнения может понадобиться перебор случаев.

3. Квадрат со стороной 60 см разрезан на 3 прямоугольника. Периметр одной из частей равен сумме периметров двух других. Найдите размеры этой части.

Ситуация может задаваться большим количеством чисел. Если ясно, что все их не найдешь, можно не вводить лишних букв для таких неизвестных, а искать связи между суммами в группах, и брать за неизвестные эти суммы.

4. Олег и Маша за осень получили по 60 оценок, причем Олег получил пятерок столько же, сколько Маша четверок, четверок столько же, сколько Маша троек, троек столько же, сколько Маша двоек, и двоек столько же, сколько Маша пятерок. При этом средний балл у них одинаковый. Сколько двоек за осень получил Олег?
5. В таблицу 3×3 записаны числа. Сумма трех чисел в каждой строке и в каждом столбце равна 121, а на каждой диагонали равна 77. Найдите число в центральной клетке таблицы.

Когда нет единой формулы для всех, можно использовать формулы для отдельных групп и писать свои уравнения для отдельных случаев.

6. В ряд выписаны числа 107, 108, 114, 115, 121, 122, 128, 129, Есть ли в этом ряду число в 11 раз больше номера места, на котором оно стоит?
7. Будильник был заведен на 8 часов, но Игорь проснулся раньше и заметил, что часовая стрелка делит пополам угол между минутной стрелкой и показывающей на цифру 8 стрелкой звонка будильника. Игорь сообразил, что такое случилось в последний раз до звонка. Когда проснулся Игорь?
8. Даны три числа. Если их все увеличить на 1, то их произведение тоже увеличится на 1. Если все исходные числа увеличить на 2, то их произведение тоже увеличится на 2. А на сколько увеличится произведение, если все исходные числа увеличить на 3?

Зачётные задачи

УК1. Род Муромцевых (ныне, увы, прекратившийся) основали трое сыновей Ильи Муромца. Все мужчины в этом роду имели по трое детей, за исключением семерых, не оставивших потомства. Всего в роду были 1994 женщины. Сколько всего человек было в роду Муромцевых? (Роду принадлежали основатели, а также те и только те дети, чей отец принадлежал роду).

УК2. Через точку с координатами (2, 2) проведены синие прямые (включая две параллельные осям координат), которые делят плоскость на углы в 18° . Найдите сумму абсцисс точек пересечения синих прямых с красной прямой $y = 2018 - x$.

УК3. В ряд были выписаны натуральные числа 1, 2, 3, ..., 2004. Их выписали в другом порядке: сначала все кратные 2 по возрастанию (то есть 2, 4, 6...), затем все из оставшихся кратные 3 по возрастанию, затем — оставшиеся кратные 5, потом – кратные 7 и т.д. На последнее место записали число 1. Докажите, что есть как минимум два числа, которые не сдвинулись со своего места.

УК4. Можно ли разрезать квадрат на 13 прямоугольников (возможно, не одинаковых) с одинаковым периметром вдвое меньшим чем у квадрата?

Малый мехмат, 7 класс, гр.1, 10 июля 2018 г, <http://www.ashap.info/Uroki/Bolgar2/2018/7-1/index.html>