

## Полуинвариант движения к цели

Строим пример шаг за шагом по алгоритму. Чтобы следить за движением к цели, подсчитываем некоторую величину. Она меняется только в одну сторону (либо все время растет, либо – убывает), то есть это – *полуинвариант*. Например, растёт число элементов, окрашенных правильно или убывает число пустых мест. Когда полуинвариант достигнет критического значения, пример будет построен.

1. На полке в беспорядке стоит собрание сочинений в 20 томах. Библиотекарь может вынуть любую группу стоящих подряд томов и поставить их на то же место в обратном порядке. Как ему не более чем за 19 таких операций расставить тома строго по порядку?
2. На столе стоят 144 стакана с водой. Разрешается выбрать любую группу из не более чем трёх стаканов и переливаниями внутри группы уравнивать количества воды в них. Как такими операциями добиться, чтобы во всех стаканах воды стало поровну?
3. У Гоши работает 10 сотрудников. Каждый месяц Гоша повышает зарплату на 1 рубль ровно девятерым (по своему выбору). Как Гоше повышать зарплаты, чтобы сделать их одинаковыми? (Зарплата - целое число рублей.)
4. а) У Петра есть 64 бесцветных ферзя. Каждым ходом она выставляет по одному ферзю на шахматную доску, а Василиса красит выставленного ферзя в белый, красный, синий или жёлтый цвет. Когда все ферзи выставлены и покрашены, игра заканчивается. Пётр хочет, чтобы в финальной позиции были бьющие друг друга ферзи одного цвета. Может ли Василиса ему помешать?  
б) То же, но Пётр выставляет ферзей каждым пятым ходом, а остальные ходы он делает одним из ферзей на доске. Василиса каждым ответным ходом красит или перекрашивает одного из ферзей на доске по своему выбору.  
(Ферзи бьют друг друга по вертикали, горизонтали и диагонали если между ними нет других ферзей)
5. а) В ряд стоят два блюда, на левом лежат 7 конфеты, на правом – 5. Оля ест конфеты по одной. Когда она ест конфету с левого блюда, то на правое добавляется 9 конфет (дед Мороз добавляет их из своего мешка). Какое наибольшее число конфет может съесть Оля?  
б) В ряд стоят три блюда, на левом лежат 3 конфеты, среднее и правое – пустые. Лиза ест конфеты по одной. Когда она берет конфету с какого-нибудь блюда, то во всех блюдах справа от неё число конфет дополняется до 9 (дед Мороз добавляет их из своего мешка). Какое наибольшее число конфет может съесть Лиза?
6. Сначала Пётр заполняет верхнюю строку и левый столбец таблицы  $100 \times 100$  крестиками и ноликами (по одному знаку в клетку), затем Василиса заполняет крестиками и ноликами оставшиеся клетки. Василиса выиграет, если в каждом квадрате  $2 \times 2$  окажется нечетное число крестиков. Может ли Пётр ей помешать?
7. Среди 50 школьников каждый знаком не менее чем с 25 другими. Докажите, что можно их разбить на группы из 2 или 3 человек так, чтобы каждый был знаком со всеми в своей группе.
8. Дана клетчатая доска  $1 \times 100000$ , вначале пустая, и куча из 100000 шашек. Пётр и Василиса ходят по очереди, начинает Пётр. Каждым ходом он выставляет 2 шашки из кучи на любые 2 пустые клетки. Своим ходом Василиса снимает одну группу шашек, стоящих подряд, без пустых клеток между ними (может снять 1 шашку), и кладет их в кучу. Пётр выиграет, если после его хода на доске найдется группа из не менее 10 шашек подряд. Может ли Василиса ему помешать?

## Зачётные задачи

**ПЦ1.** Дано число 1. Каждым ходом Пётр приписывает к нему справа цифру 1 или 2, а Василиса меняет местами любые две цифры (возможно, одинаковые). Докажите, что Василиса может действовать так, чтобы после её 100-го хода получился палиндром.

**ПЦ2.** У нескольких крестьян есть всего 512 овец. Если у кого-то оказывается не менее половины всех овец, остальные стовариваются и раскулачивают его: каждый берет себе столько овец, сколько у него уже есть. (В случае двух половинок раскулачивают кого-то одного из двоих). Произошло 9 раскулачиваний. Докажите, что все овцы собрались у одного крестьянина.

**ПЦ3.** В колоде 52 карты, по 13 каждой масти. Олег вынимает из колоды по одной карте. Вынутые карты в колоду не возвращаются. Каждый раз перед тем, как вынуть карту, Олег загадывает какую-нибудь масть. Докажите, что если Олег каждый раз будет загадывать масть, карт которой в колоде осталось не меньше, чем карт любой другой масти, то загаданная масть совпадет с мастью вынутой карты не менее 13 раз.