

По кругу

Пара соседей. Двойственный круг.

1. За круглым столом сидят дети обоего пола, мальчиков и девочек не поровну. Докажите, что найдется пара рядом сидящих детей

- а) разного пола;
- б) одинакового пола.

2. По кругу стоят 29 клеток, в каждой – серые и белые мыши. Из каждой клетки по одной мышке перебежало в соседнюю по часовой стрелке клетку. Можно ли утверждать, что найдется клетка, где число и белых, и серых мышей не изменилось?

3. По кругу стоят 2013 натуральных чисел. Оказалось, что в любой паре соседних чисел одно из них делится на другое. Докажите, что найдутся два несоседних числа, одно из которых тоже делится на другое.

Число перемен. Чередование.

4. За круглым столом сидят дети обоего пола. Докажите, что число рядом сидящих пар разного пола – чётно (один ребёнок может войти и в две пары).

5. По кругу стояли 50 корзин с яблоками. Петя шел по кругу и для каждой пары соседних корзин записывал, на сколько отличается в них количество яблок (он из большего вычитал меньшее). В результате у него оказались записаны по разу все числа от 1 до 50 в некотором порядке. Докажите, что Петя где-то ошибся.

Другой круг.

6. а) По кругу расположены 67 кувшинок, на одной – лягушка. Она прыгает с кувшинки на кувшинку ровно через одну кувшинку. Докажите, что с любой кувшинки лягушка может добраться до любой другой не более, чем за 33 прыжка.

б) То же, но лягушка прыгает ровно через k кувшинок ($k < 33$).

7. По кругу стоят лжецы и рыцари, всего 100 человек. В первый раз каждого спросили «Верно ли, что твой сосед справа – лжец?». Двое ответили: «Да», остальные – «Нет». Во второй раз каждого спросили: «Верно ли, что твой сосед слева через одного – лжец?». И снова двое ответили: «Да», остальные – «Нет». В третий раз спросили: «Верно ли, что стоящий напротив тебя – лжец?». Сколько человек на этот раз ответят «Да»?

Распространение по кругу. Зацикливание

8. По кругу записаны несколько чисел, не все из них одинаковы. Сумма любых пяти подряд равна 2016. Докажите, что количество чисел кратно 5.

9. а) Расставьте по кругу 6 различных чисел так, чтобы каждое из них равнялось произведению двух соседних.

б) Чему равно произведение всех чисел такой шестёрки?

10. По кругу написаны натуральные числа, причём каждое равно сумме или разности своих соседей. Докажите, что количество чисел на круге делится на 3.

Зачётные задачи

Кр1. По кругу записаны 77 натуральных чисел. Известно, что если у двух чисел есть общий сосед (то есть, между ними расположено ровно одно число), то одно из них делится на другое. Докажите, что найдутся два числа, у которых нет общего соседа, но при этом одно из них делится на другое.

Кр2. Числа 1, 2, ..., 100 стоят по кругу в некотором порядке. Может ли случиться, что у любых двух соседних чисел модуль разности не меньше 30, но не больше 50?

Кр3. На столе по кругу лежат рублёвые и двухрублёвые монеты. У рублёвок один сосед лежит орлом, другой — решкой; у двухрублёвок оба соседа лежат одинаково – оба орлом или оба решкой. Может ли на столе лежать в сумме ровно 111 рублей?

Кр4. По кругу сидят 25 учащихся, у них всего 65 гаджетов. У каждого мальчика на 1 гаджет больше, чем у его соседа или соседки справа. Каково наибольшее возможное число мальчиков в этом круге?