

Целочисленные неравенства

По сравнению с обычными, целочисленные неравенства обладают дополнительными свойствами.

I. Пусть m и n – натуральные. Если m делит n , то $m \leq n$.

1. Миллионер Корейко купил у Остапа Бендера компрометирующую его расписку и получил причитающуюся ему сдачу; при этом использовались купюры только в 63 и 350 тугриков. Какую наименьшую сумму могла стоить расписка?
2. Какая наименьшая сумма цифр может быть у числа, кратного а) 288; б) 69?

Усиление неравенств. Пусть a и b – целые. Если $a < b$, то $a \leq b - 1$ и $b \geq a + 1$.

3. Назовем представление 200 в виде суммы нескольких натуральных чисел *хорошим*, если нельзя подчеркнуть одно или несколько слагаемых с суммой 2. Какое наибольшее число слагаемых может быть в хорошей сумме?
4. а) Какое наименьшее число тупых углов может быть в выпуклом многоугольнике?
б) В выпуклом многоугольнике сумма тупых углов равна 2017° . Сколько сторон может быть у этого многоугольника?
5. а) Какое наибольшее количество целых чисел может лежать *внутри* интервала длины a на числовой прямой? Разберите случаи когда a целое и когда – не целое.
б) Внутри интервала длины a лежит n целых чисел. Какие значения может принимать a ?

Непредставимость

Если число лежит строго между соседними точными квадратами, то оно – не точный квадрат. То же верно и для кубов. Вообще, если $f(n)$ – целое для натуральных n и $f(1) < f(2) < \dots < f(k) < \dots$, то из неравенства $f(m) < x < f(m+1)$ следует, что x не представимо в виде $f(n)$.

6. а) Произведение трёх последовательных натуральных чисел – не точный куб. Доказать!
б) Может ли произведение двух последовательных натуральных чисел равняться произведению двух соседних четных чисел?
- 7*. Десятичная запись числа 2^n начинается цифрой 5. Докажите, что десятичная запись числа 5^n **не** начинается цифрой 2.

Зачётные задачи

ЦН1. По итогам математической олимпиады восемь победителей получили 97 книг. За более высокое место давали больше книг. Известно, что все победители получили разное число книг, причем за последние два места книг было вручено больше чем за первое место. Сколько книг получил каждый из восьми победителей? Найдите все решения и покажите, что других нет.

ЦН2. Натуральные числа m и n взаимно просты. Дробь $\frac{m + 2000n}{n + 2000m}$ можно сократить на число d . Каково наибольшее возможное значение d ?

ЦН3. Известно, что число b положительно, а неравенство $1 < xb < 2$ имеет ровно 3 решения в целых числах. Сколько решений в целых числах может иметь неравенство $2 < xb < 3$?