

Процессы и инварианты

Процесс состоит из цепочки разрешенных шагов (например, ходов). За развитием событий легче следить, если знаешь, что именно не меняется.

1. Шахматный король согласен ходить только по диагонали. Может ли он из левого нижнего угла шахматной доски перебраться в правый нижний?

2. а) На листке написаны по разу все нечетные числа от 1 до 99. Можно стереть любые два числа a и b и записать число $a+b$. В конце осталось одно число. Найдите его.

б) На листке написаны по разу все дроби с числителями от 1 до 99, у которых знаменатель на 2 больше числителя. Можно стереть любые два числа a и b и записать число ab . В конце осталось одно число. Найдите его.

3. На столе стоит 17 стаканов дном вверх. Петя берет два стакана наугад и переворачивает их. Может ли он добиться, чтобы все стаканы стали дном вниз?

Определение. Инвариант – это что-то (число, свойство), что не изменяется при разрешенных действиях (например, при разрезании не меняется сумма площадей частей фигуры). Типичные инварианты: четность, остаток по какому-то модулю, произведение или сумма всех чисел или остатков и т.п. Инварианты дружат с подсчетом двумя способами. Если разрешенные преобразования инвариант сохраняют, то нельзя получить ситуацию с другим значением инварианта (например, нельзя доехать на поезде от Стокгольма до Нью-Йорка, поскольку поезд не меняет континент).

4. К числу можно приписывать справа цифры 0, 3, 6 и 9. Можно ли такими операциями из числа 2017 получить число, кратное 99?

5. Разменный автомат меняет одну монету на пять других. Можно ли с его помощью разменять одну монету на 100 монет?

6. На доске можно выделить любой прямоугольник, где есть клетки двух цветов, и перекрасить все клетки в нём в противоположный цвет. Можно ли такими операциями доску, покрашенную в шахматном порядке, сделать полностью белой?

Инвариант можно применять для подсчетов и оценок.

7. Выпуклый n -угольник разрезан непересекающимися диагоналями на четырёхугольники. Сколько частей получилось?

8. По кругу расположены 30 монет, чередуясь: три подряд орлом, три решкой, три орлом, три решкой и т.д. Если у монеты два соседа лежат по-разному, ее можно перевернуть. Какое наибольшее число монет можно положить орлом с помощью таких операций?

9. В Зазеркалье имеют хождение монеты достоинством 7, 13 и 25 гиней. Алиса заплатила за пирожок несколько монет, и получила на сдачу на две монеты больше. Какова минимально возможная стоимость покупки?

10. Есть три кучки орехов: 51 орех – в первой, 49 – во второй, 5 – в третьей. Разрешается объединять любые кучки в одну, а также разделять кучку, состоящую из четного количества орехов, на две равные. Какое наибольшее количество кучек можно получить?

Ещё задачи

ПИ1. Шахматная доска вначале доска раскрашена как обычно. За один ход разрешено перекрасить в противоположный цвет все клетки одной строки или столбца. После нескольких таких операций на доске есть белая клетка. Какое наименьшее число клеток могли остаться белыми?

ПИ2. В банке 500 долларов. Разрешаются две операции: взять из банка 300 долларов или положить в него 18 долларов. Эти операции можно проводить много раз, при этом, однако, никаких денег, кроме тех, что первоначально лежат в банке, нет. Какую максимальную сумму можно извлечь из банка и как это сделать?

Малый мехмат, 7 класс, июль 2017 г. <http://www.ashap.info/Uroki/Bolgar2/2017/7-2/index.html>