

Пошаговое конструирование

Многоэтажные здания строят, ставя по очереди следующий этаж на предыдущий. Так, начав, например, с двухэтажного коттеджа, можно построить 100-этажный небоскрёб.

1. а) Представьте 1 как сумму трёх различных дробей с числителем 1.
б) Представьте $1/7$ как сумму двух различных дробей с числителем 1.
в) Представьте 1 как сумму четырёх различных дробей с числителем 1.
г) Докажите, что 1 можно представить как сумму 100 различных дробей с числителем 1.
2. Как отметить на окружности 10 точек так, чтобы все попарные расстояния между ними были различны
3. Компьютер знает несколько различных простых чисел.
а) Как ему найти ещё одно не равное им простое число?
б) Как ему найти ещё столько же не равных им различных простых чисел?
Можно шагать не по всем числам, а только по числам избранного вида.
4. Докажите, что любой треугольник можно разрезать на 101 меньший треугольник так, чтобы у них не было сторон на одной прямой, кроме тех, по которым треугольники примыкают друг к другу.
Бывают конструкции, где этаж опирается на нижний, но не на предыдущий. Тогда может понадобиться несколько «стартовых» этажей.
5. Докажите, что если у выпуклого многоугольника больше 7 сторон, то его можно разбить непересекающимися диагоналями на пятиугольники и шестиугольники.

Зачётные задачи.

6. Дан алгоритм: от прямоугольника с неравными сторонами отрезают квадрат со стороной, равной меньшей стороне прямоугольника; если оставшаяся часть не квадрат, процесс повторяют. Докажите, что есть прямоугольник, для которого алгоритм закончит работу ровно после 20-го отрезания, причем все отрезанные квадраты будут разного размера (оставшаяся часть не в счет).
7. Первоклассник Сёма пока умеет писать только цифры 1 и 7. Докажите, что для любого $n > 77$ он может написать кратное 7 число с суммой цифр n .
8. Как найти 10 натуральных чисел таких, что для каждой двух из них остаток при делении большего на меньшее равен 1?
9. Как построить конечный набор точек плоскости такой, что на расстоянии 1 от каждой точки было ровно 5 отмеченных точек?