Теорема о пересечении ломаных

1. Король прошел из левого нижнего угла доски в правый верхний, делая ходы вправо, вверх и вправо-вверх. Ладья прошла из правого нижнего в левый верхний угол этой же доски, делаю ходы на одну клетку влево и вверх. Докажите, что есть клетка, на которой побывали обе фигуры.

2. На какое наименьшее число многоугольников можно разрезать по границам клеток шахматную доску так, чтобы каждая клетка примыкала хотя бы одной стороной к линии разреза?

Теорема о пересечении ломаных (ТПЛ). Если внутри квадрата $ABCD$ проходят две ломаные: одна с концами A и C, другая с концами B и D, то эти ломаные пересекаются.

При решении задач 3, 4 и 5 можно использовать ТПЛ.

3. Докажите, что если внутри квадрата $ABCD$ проходят две ломаные: одна с концами на сторонах AB и CD, другая с концами на сторонах BC и AD, то эти ломаные пересекаются.

4. Докажите, что если король прошел от верхнего до нижнего края клетчатой доски $N\times N$, а хромая ладья – от левого до правого, то на некоторой клетке побывали оба.

5. Вершины графа – 16 узлов решетки 3×3, а ребра – некоторые из единичных отрезков решетки. За один вопрос можно любую пару вершин и узнать, лежат ли они в одной комненте связности. За какое наименьшее число вопросов можно наверняка узнать, связен ли граф?

Доказательство ТПЛ

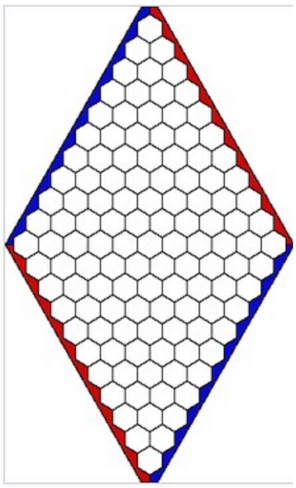
6. На прямой отмечены две точки – слева синяя, справа красная. За один ход можно добавить или стереть две точки одного цвета, если между ними нет других точек. Можно ли в конце получить снова две точки: слева красная, справа – синяя?

7. Внутри квадрата проведены несколько ломаных, и отмечены их вершины и концы. Докажите, что можно провести несколько параллельных прямых так, чтобы между любыми двумя соседними была ровно одна отмеченная точка.

8. Докажите ТПЛ, покрасив ломаные в синий и красный цвета.

Зачётные задачи

ПЛ1. Как в задаче 5, но для схемы **а)** 5×5 (36 узлов) **б)** $N\times N$.



ПЛ2. Двое игроков по очереди выставляют красные и синие фишки на пустые клетки доски (см. рис.). Кто первый соединит непрерывной цепью своиих фишек стороны своего цвета – выиграет. Докажите, что игра не может закончится вничью.

ПЛ3. Мозаика состоит из набора плоских прямоугольников. Все их можно уложить в один слой в одну прямоугольную коробку (так, что их стороны параллельны сторонам коробки). В бракованном наборе у каждого прямоугольника одна из сторон оказалось меньше стандартной. Можно ли утверждать, что у коробки, в которую складывается набор, тоже можно уменьшить одну из сторон?