В ряд лежали яблоки и груши…

Непрерывная комбинаторика: Порядок

В некоторых задачах возникают комбинации из *конечного* числа объектов нецелого веса. Важным приемом является упорядочение объектов.

1. Есть несколько камней, выложенных в порядке возрастания весов. За какое наименьшее число взвешиваний на чашечных весах без гирь можно проверить или опровергнуть утверждение «любые два камня вместе тяжелее одного»?

2. а) Имеются 300 яблок, любые два из которых различаются по весу не более, чем в два раза. Докажите, что их можно разложить в пакеты по два яблока так, чтобы любые два пакета различались по весу не более, чем в полтора раза.

б) Имеются 300 яблок, любые два из которых различаются по весу не более, чем в три раза. Докажите, что их можно разложить в пакеты по четыре яблока так, чтобы любые два пакета различались по весу не более, чем в полтора раза.

Предположив противное, мы получим некоторое утверждение, верное для всех наборов. Умело выбирая нужные наборы, придем к противоречию.

3. Есть 1000 яблок, которые надо разложить в 10 пакетов по 100 яблок в каждом. Оказалось, что при любой такой раскладке найдутся хотя бы два пакета одинакового веса. Докажите, что

а) есть по крайней мере 200 яблок одинакового веса;

б) есть раскладка, когда по крайней мере 5 пакетов весят одинаково.

4. а) Есть 21 киви общим весом 1 кг. Докажите, что есть не менее 1024 способов выбрать 11 киви общим весом не менее 0,5 кг.

б) В 100 ящиках лежат апельсины и бананы. Докажите, что можно так выбрать 51 ящик, что в них окажется *по весу* не менее половины всех апельсинов и не менее половины всех бананов.

Зачетные задачи

КО1. Есть пять груш разного веса. Про любые две известно, которая тяжелее. Известно также, что можно разложить все груши на две кучки равного веса. Как можно сделать это за два взвешивания на чашечных весах без гирь?

КО2. Сборные Польши и Чехии (по 12 игроков в каждой) намерены сыграть серию матчей по борьбе. В парах всегда более сильный игрок побеждает более слабого, ничьих не бывает. Для каждого матча организуется 12 пар: поляк против чеха, в каждой паре побеждает один из соперников, счет в матче – по числу побед. Организаторам известны сравнительные силы игроков внутри каждой из команд, но не между игроками из разных стран. Они хотят устраивать матчи до тех пор, пока какой-нибудь матч не закончится вничью (или пока не выяснится, что ничейный матч невозможен). Каким наименьшим числом матчей они всегда могут обойтись?

КО3. Есть набор из 10 яблок. Назовем натуральное число $k<10$ хорошим, если найдется k яблок, чей вес равен ровно половине общего веса. Каково наибольшее возможное количество хороших чисел может быть у набора?

КО4. На столе лежат 10 кусков сыра. Петя берет себе самый маленький (по весу) кусок. Затем он режет один из кусков на столе на две части, и снова берет себе самый маленький из получившихся 10 кусков. Эти действия: разрезание и взятие куска – Петя повторяет, пока у него не наберется 9 кусков. Докажите, что Петя возьмет себе не более половины сыра (по весу).

КО5. Докажите, что в условиях задачи 3 есть не менее 950 яблок одинакового веса.