Непрерывная комбинаторика: точки и сыр

В некоторых задачах возникают комбинации из *конечного* числа объектов, но сами объекты выбираются из *бесконечного* набора, заданного *непрерывным параметром* или параметрами.

Хорошей моделью в таких задачах служат наборы точек на прямой и окружности.

1. а) Нам обещают выдать несколько палочек неизвестных длин. Из них всех надо будет сложить три отрезка одинаковой длины. Правда, перед этим несколько раз можно распилить любую палочку или кусок на две части. Каким наименьшим числом распилов можно гарантированно обойтись?

б) Несколько кусков сыра требуется разложить на 7 кучек одинакового веса, разрезав предварительно несколько кусков на части. Каким наименьшим количеством разрезов можно гарантированно обойтись? (При любом разрезе один кусок распадается на два).

2. а) На окружности отмечено 25 точек. Докажите, что можно поставить еще одну точку, и закрасить ровно 13 из получившихся дуг так, чтобы по длине оказалась покрашена ровно половина окружности.

в) Имеется 25 кусков сыра разного веса. Докажите, что можно один из этих кусков разрезать на две части и разложить сыр в два пакета так, что части разрезанного куска окажутся в разных пакетах, веса пакетов будут одинаковы и число кусков в пакетах также будет одинаково.

С группами точек можно поступать как с одним целым: переворачивать, сдвигать, сжимать или растягивать. Удачно выбранная операция помогает решить задачу.

3. а) Сколько целых чисел может лежать на отрезке числовой оси длины b?

б) Сколько целых чисел может лежать на интервале числовой оси длины b?

в) Известно, что число a положительно, а неравенство $1 < xa < 2$ имеет ровно 3 решения в целых числах. Сколько решений в целых числах может иметь неравенство $2 < xa < 3$?

4. а) Вначале на отрезке длины 1000 отмечены только его концы. За одну операцию можно выбрать один из концов и дополнительно отметить все точки, которые в полтора раза ближе к выбранному концу, чем отмеченные ранее. Докажите, что за несколько таких операций можно добиться, чтобы отмеченные точки разбили отрезок на части длины меньше 1.

б) Есть два сосуда 3 и 5 литров без делений, два крана – с горячей и холодной водой и раковина для слива воды. Задана промежуточная температура (меньше температуры горячей, но больше температуры холодной воды). Докажите, что можно отмерить 3 литра воды с температурой, которая отличается от заданной не более, чем на 0,1 градуса.

Зачётные задачи

5. Есть несколько кусков сыра разного веса и разной цены за кг. Докажите, что можно, разрезав не более двух кусков, разложить куски на 2 кучки равные по весу и по цене.

6. Есть сто картинок, на каждой – взрослый и ребенок ростом поменьше. В фотошопе каждая картинка сжимается в целое число раз (вообще говоря, свое для каждой картинки) и становится частью большой картины. Докажите, что можно добиться, чтобы на большой картине каждый взрослый имел рост больше каждого ребенка.

7. Купившему головку сыра весом 3 кг магазин предлагает призовую игру. Покупатель режет головку на 4 куска, а продавец выбирает из этих кусков один или несколько и раскладывает их на одну или на обе чаши весов. При неравновесии продавец обязан за счет магазина добавить призовой кусок сыра, уравновешивающий чаши. Продавец старается сделать приз поменьше, а покупатель – побольше. Найдите вес призового куска при наилучших действиях сторон.

8. Задано n>2. Двое по очереди отмечают точки на окружности: первый — красным цветом, второй — синим. Когда отмечено по n точек каждого цвета, игра заканчивается. Затем каждый игрок находит на окружности дугу наибольшей длины с концами своего цвета, на которой больше нет отмеченных точек. У кого длина дуги больше — тот выиграл (в случае равенства длин дуг, а также при отсутствии таких дуг у обоих игроков — ничья). Кто из играющих может всегда выигрывать, как бы ни играл соперник?