Эйлеровы пути и обходы

Определение. Путь, проходящий по каждому ребру (ориентированного или неориентированного) графа ровно один раз, называется *эйлеровым*. Замкнутый эйлеров путь называется *эйлеровым циклом*.

Теорема 1. а) Пусть в графе есть незамкнутый эйлеров путь. Тогда степени двух концов этого пути нечетны, а степени всех остальных вершин четны.

б) Пусть в графе есть эйлеров цикл. Тогда степени всех вершин четны.

2. На плоскости нарисованы несколько окружностей так, что с любой можно перейти на любую, не сходя с этих окружностей. Докажите, что тогда существует замкнутый путь, проходящий по всем участкам всех окружностей ровно по разу.

Лемма 3. Если в графе степени всех вершин четны, то его можно представить в виде объединения циклов так, что каждое ребро входит ровно в один цикл.

Теорема 4. Дан связный граф.

а) Если степени всех вершин четны, то в нем есть эйлеров цикл;

б) Если степени ровно двух вершин нечетны, то в нем есть эйлеров путь с концами в нечетных вершинах.

5. Докажите, что есть строка из 37 ненулевых цифр, в которой каждая пара различных цифр где-то стоит рядом.

Теорема 6. Если в ориентированном связном графе из каждой вершины выходит столько же стрелок, сколько в неё входит, то в нём есть эйлеров цикл.

7. Докажите, что есть последовательность из 82 цифр, в которой можно подчеркнуть любое двузначное число, не кратное 10.

8*. На кодовом замке 10 кнопок с цифрами от 0 до 9. Для открытия кодового замка нужно нажать 4 кнопки в определенном порядке (при этом предыдущие нажатия не важны). Докажите, что замок можно наверняка открыть, сделав не более 10003 нажатий.

Еще задачи

ЭП1. Можно ли сетку, состоящую из границ единичных квадратиков клетчатого квадрата 4×4 представить в виде объединения

а) восьми ломаных длиной 5;

б) пяти ломаных длиной 8?

ЭП2. В связном графе каждое ребро синее или красное. Из каждой вершины синих и красных ребер выходит поровну. Докажите, что между любыми двумя вершинами есть путь, где цвета ребер строго чередуются.

ЭП3. Из куска проволоки длиной 12 дециметров требуется спаять каркас куба с ребром в 1 дм. На какое наименьшее число частей придется предварительно разрезать этот кусок?

ЭП4. Город в плане выглядит как квадрат 3×3, каждая сторона квартала-квадратика – участок улицы длиной 100м (включая внешний контур квадрата). Какой наименьший путь придется проделать паровому катку, чтобы заасфальтировать все улицы?

ЭП5. а) На каждой горизонтали и каждой вертикали клетчатой доски стоит по 4 или по 6 фигур. Всегда ли можно убрать несколько фигур так, чтобы на каждой вертикали и каждой горизонтали стояло ровно по две фигуры?

б*) Тот же вопрос, если на каждой горизонтали и каждой вертикали шахматной доски стоит не менее двух фигур.

ЭП6. В стране Центумии некоторые пары городов соединены дорогами, причем из каждого города выходит ровно 100 дорог. *Пучком* называется набор из 10 дорог, выходящих из одного города. Докажите, что все дороги можно разбить на несколько пучков.