

ЭЙЛЕРОВЫ ПУТИ И ОБХОДЫ

Определение. Путь, проходящий по каждому ребру графа ровно один раз, называется *эйлеровым*. Замкнутый эйлеров путь называется *эйлеровым циклом*.

Теорема 1. а) Пусть в графе есть незамкнутый эйлеров путь. Тогда степени двух концов этого пути нечетны, а степени всех остальных вершин четны.

б) Пусть в графе есть эйлеров цикл. Тогда степени всех вершин четны.

2. На плоскости нарисованы несколько окружностей так, что с любой можно перейти на любую, не сходя с этих окружностей. Докажите, что тогда существует замкнутый путь

а) проходящий по всем участкам всех окружностей ровно по разу;

б) сверх того несамопересекающийся (но, возможно, самокасающийся).

Лемма 3. Если в графе степени всех вершин четны, то его можно представить в виде объединения циклов так, что каждое ребро входит ровно в один цикл.

Теорема 4. Дан связный граф.

а) Если степени всех вершин четны, то в нем есть эйлеров цикл;

б) Если степени ровно двух вершин нечетны, то в нем есть эйлеров путь с концами в нечетных вершинах.

5. Докажите, что есть строка из 37 ненулевых цифр, в которой каждая пара различных цифр где-то стоит рядом.

6. Можно ли сетку, состоящую из границ единичных квадратиков клетчатого квадрата 4×4 представить в виде объединения

а) восьми ломаных длиной 5;

б) пяти ломаных длиной 8?

Определение. Граф *ориентирован*, если на каждом из его ребер задано направление (Будем называть такие ребра *стрелками*). Допускаются стрелки из A в A (*петли*) и пары стрелок из A в B и из B в A .

Теорема 7. Если в ориентированном связном графе из каждой вершины выходит столько же стрелок, сколько в неё входит, то в нём есть эйлеров цикл.

8. Докажите, что есть последовательность из 82 цифр, в которой можно подчеркнуть любое двузначное число, не кратное 10.

9. На кодовом замке 10 кнопок с цифрами от 0 до 9. Для открытия кодового замка нужно нажать 3 кнопки в определенном порядке (при этом предыдущие нажатия не важны). Докажите, что замок можно наверняка открыть, сделав не более 1002 нажатий.

10. Город в плане выглядит как квадрат 3×3 , каждая сторона квартала-квадратика – участок улицы длиной 100м (включая внешний контур квадрата). Какой наименьший путь придется проделать паровому катку, чтобы заасфальтировать все улицы?