

Подсчет двумя способами в графах

0. а) Таблица 7×8 (7 строк, 8 столбцов) заполнена нулями и единицами. В каждом столбце – по 4 единицы, во всех строках, кроме последней – по 5 единиц. Сколько единиц в последней строке?
б) На танцплощадке 10 девчонок и 9 ребят. Каждый раз танцевали пары из девушки с парнем. Каждый парень потанцевал с 5 девушками. 7 девушек потанцевали с четырьмя парнями каждая, ещё одна – с 8 парнями. Со сколькими парнями танцевала 10-я девушка?
1. а) На доске 11×10 (11 строк, 10 столбцов) расставлены фишки. Может ли во всех строках быть разное количество фишек, а во всех столбцах – одинаковое?
б) На доске $(n+1) \times n$ расставлены фишки. При каких n во всех строках может быть разное количество фишек, а во всех столбцах – одинаковое?
2. Каково наибольшее возможное число рёбер
а) в графе с n вершинами;
б) в двудольном графе с b белыми и r чёрными вершинами?
- Определение.** Степенью вершины называется число выходящих из неё рёбер.
- Теорема 3.** а) Сумма степеней вершин графа равна удвоенному числу рёбер.
б) В конечном графе число вершин нечётной степени чётно.
4. В стране Гобларии из Гоблинграда выходит 101 авиалиния, из Лизунца – одна, а из остальных городов – по 10. Докажите, что из Гоблинграда в Лизунец можно добраться на рейсовых самолетах (возможно, с пересадками в других городах).
5. а) В каждую клетку клетчатого прямоугольника $m \times n$ вписали число его соседей по стороне. Найдите сумму всех этих чисел.
б) Тимур по одной вписывает числа в клетки шахматной доски. Каждый раз он пишет число уже заполненных соседей по стороне. Когда все клетки заполнены, он считает сумму всех выписанных чисел. Докажите, что сумма не зависит от порядка заполнения клеток и найдите её.
6. В однокруговом шахматном турнире участвовало 16 школьников, причем мальчиков больше чем девочек. Каждый с каждым сыграл по разу. Половина партий была между мальчиками и девочками. Сколько девочек участвовали в турнире? (В однокруговом турнире каждый с каждым играет по разу)
7. Какое наибольшее число рёбер может быть в двудольном графе, если число вершин в нем равно
а) 10; б) 21; в) $2m$; г) $2m+1$?
8. На числовой прямой отмечены точки с координатами 1, 2, 3, ..., 21. Найдите количество отрезков нечетной длины с концами в отмеченных точках.
9. В строку выписано 11 целых чисел. Для любой группы подряд идущих чисел подсчитана ее сумма (группы из одного числа тоже учитывались). Какое наибольшее количество сумм могло оказаться нечетными?

Ещё задачи

ДС1. Десять мальчиков и десять девочек участвовали в однокруговом турнире по теннису. Все мальчики одержали поровну побед. За каждую победу над мальчиком девушке дарили цветок. Могло ли по окончании турнира у всех девочек оказаться поровну цветов? (В теннисе нет ничьих)

ДС2. Ковбои всегда говорят правду знакомым и лгут незнакомым. Собрались как-то 50 ковбоев, и каждый сказал каждому из присутствующих одну из двух фраз: «У меня чётное число знакомых в этой компании» или «У меня нечётное число знакомых в этой компании».

а) Могло ли оказаться, что первая фраза произнесена ровно 2015 раз?

б) Какое наибольшее количество раз могла быть произнесена первая фраза?

ДС3. На шахматную доску по одному выставляются короли: первый – на любую клетку, а каждый следующий должен побить нечетное число ранее выставленных королей. Можно ли заполнить все клетки доски?