Двудольный граф

Раскраска в два цвета

1. На шахматной доске стоят несколько коней. Докажите, что их можно покрасить в два цвета так, чтобы кони одинакового цвета друг друга не били.

2. Выписаны 1000 целых чисел. Докажите, что их можно покрасить в два цвета так, чтобы отношение чисел одинакового цвета не было простым числом.

3. На координатной плоскости нарисованы несколько неперекрывающихся равносторонних треугольников. У каждого есть сторона, параллельная оси *Ox*. Докажите, что треугольники можно покрасить в два цвета так, чтобы треугольники одинакового цвета не соприкасались по отрезку.

Определение. Граф – *двудольный*, если его вершины можно раскрасить в два цвета так, что не будет ребер с концами одинакового цвета. Примеры: а) любое дерево (то есть связный граф без циклов); б) граф таблицы: вершины – строки и столбцы, связаны ребром – если на пересечении не 0.

При движении по двудольному графу цвета вершин строго чередуются, поэтому вернуться в исходную вершину можно только за чётное число ходов.

4. В задачах 1-3 определите вершины и рёбра двудольных графов.

Позиции и ходы

С игрой всегда связан граф: позиции – вершины, ходы – рёбра. Полезно знать, когда этот граф – двудольный.

5. а) На прямой сидят два кузнечика. Каждую минуту один из кузнечиков перепрыгивает ровно через одного другого. Могут ли все кузнечики оказаться на своих местах ровно через 777 прыжков?

б) То же для трёх кузнечиков.

6. а) На шахматной доске стоят две одинаковых фишки. За один ход можно сдвинуть одну из фишек на соседнее поле по вертикали или горизонтали. Могут ли фишки перейти в симметричную относительно средней линии позицию ровно за 2011 ходов?

б) На шахматной доске стоят пять одинаковых фишек. За один ход можно сдвинуть одну из фишек на соседнее поле по вертикали или горизонтали. Могут ли фишки перейти в центрально симметричную позицию ровно за 2011 ходов?

Чередование и обходы

8. Пусть Г – двудольный граф с черными и белыми вершинами. Докажите, что

а) Если в Г есть замкнутый цикл, проходящий через каждую вершину ровно по одному разу, то вершин каждого цвета – поровну.

б) Если в Г есть путь, проходящий через каждую вершину ровно по одному разу, то число белых вершин отличается от числа черных вершин не более чем на 1.

9. Замок в форме треугольника со стороной 50 метров разбит на 100 треугольных залов со сторонами 5 м. В каждой стенке между залами есть дверь. Какое наибольшее число залов сможет обойти турист, не заходя ни в какой зал дважды?

10. Для игры в классики на земле нарисован ряд клеток, в которые вписаны числа от 1 до 10 (см. рис). Маша прыгнула снаружи в клетку 1, затем попрыгала по остальным клеткам (каждый прыжок – на соседнюю по стороне клетку) и выпрыгнула наружу из клетки 10. Известно, что на клетке 1 Маша была 1 раз, на клетке 2 – 2 раза, ..., на клетке 9 – 9 раз. Сколько раз побывала Маша на клетке 10?

1	4	5	8	9
2	3	6	7	10

Ещё задачи

ДГ1. Можно ли расставить в вершинах куба натуральные числа так, чтобы в каждой паре чисел, связанных ребром, одно из них делилось на другое, а во всех других парах такого не было?

ДГ2. На шахматной доске стоят две одинаковых фишки. За один ход можно сдвинуть одну из фишек на соседнее поле по вертикали или горизонтали. Так ходили, пока не прошли через все возможные позиции. Докажите, что какая-то позиция встретилась не менее двух раз.

ДГ3. 10 кружковцев образовали дежурную команду для решения домашних задач. В команде всегда не менее 3 человек. Каждый вечер в команду добавляется один человек либо из неё исключается один человек. Можно ли будет перебрать все допустимые составы команды ровно по одному разу?

Математика у моря 2016, 9 июля. 7-8 класс, А.Шаповалов http://www.ashap.info/Uroki/Bolgar/2016/index.html