Свяжитесь с графом

Задача 1. Какое наибольшее число рёбер можно перекусить в проволочном каркасе куба так, чтобы каркас не развалился на части?

Задача 2. Пазл Пете понравился, он решил его склеить и повесить на стену. За одну минуту он склеивал вместе два куска — начальных, или ранее склеенных. В результате весь пазл склеился в одну цельную картину за 2 часа. За сколько минут склеилась бы картина, если бы Петя склеивал вместе за минуту не по два, а по три куска?

Задача 3. Из спичек сложена шахматная доска 8×8, сторона каждой клетки – одна спичка (см. рис. 4). Жук хочет, чтобы с любой клетки можно было дойти до любой другой, не переползая через спички и не выползая за пределы доски. Какое наименьшее число спичек придётся для этого убрать, если граничные спички убирать нельзя?

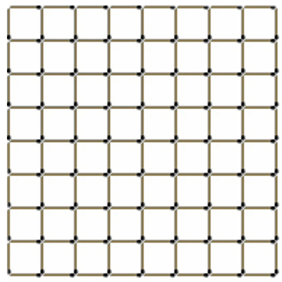


Рис. 4

Упражнение 4. Решите задачу 3 в предположении, что убирать граничные спички можно, и жук может выползать за пределы доски (но жук хочет только иметь возможность посещать все 64 клетки).

Упражнение 5. Какое минимальное число спичек нужно удалить из доски в задаче 2 так, чтобы из каждой клетки можно было добраться до границы квадрата?

Задача 6. На клетчатой бумаге нарисован многоугольник площадью в n единичных клеток. Его контур идёт по линиям сетки. Каков наибольший периметр многоугольника?

Задача 7. Дан клетчатый прямоугольник $m\times n$. Каждую его клетку разрезали по одной из диагоналей. На какое наименьшее число частей мог распасться прямоугольник?

Неформальные определения. Структуры, в которых есть связи между парами объектов, называются *графами*. Наглядное представление графа такое: изображается система точек – *вершин* графа, где некоторые пары вершин соединены линиями – *рёбрами* графа.

Определение. Граф называется *связным*, если от любой его вершины можно дойти до любой другой вершины, двигаясь по ребрам (т.е., переходя несколько раз из вершины в вершину по ребру). Пусть в произвольном графе зафиксирована вершина *A*. Множество вершин, в которые можно попасть из данной вершины *A*, двигаясь по ребрам, назовём *компонентой связности* вершины *A* и обозначим *K(A)*. При этом считается, что сама вершина *A* входит в компоненту *K(A)*.

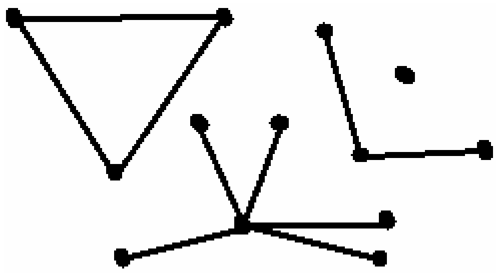


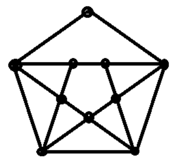
Рис. 6

Граф разбивается на компоненты связности (в частности, все вершины связного графа лежат в одной компоненте). На рис. 6 изображен пример графа, у которого всего 4 компоненты связности. Обратим внимание на то, что в компоненте может быть одна *изолированная* вершина.

Теорема о связности графа

1. Пусть дан связный граф с n вершинами. Тогда в нем не менее n–1 ребер.
2. Пусть граф с n вершинами распадается на c компонент связности. Тогда в нем не менее n–c ребер.

Задача 8 . а) Можно ли рёбра куба раскрасить в два цвета так, чтобы между любыми двумя вершинами был путь как по рёбрам одного цвета, так и по ребрам другого цвета?



б) Можно ли рёбра графа на рисунке раскрасить в два цвета так, чтобы между любыми двумя вершинами был путь как по рёбрам одного цвета, так и по ребрам другого цвета?

Задача 9. Пусть дан связный граф с n вершинами и k ребрами, причем $k > n-1$. Докажите, что можно удалить одно ребро так, чтобы граф остался связным.

Задача 10. Тетрадный лист раскрасили в 23 цвета по клеткам (при этом все цвета присутствуют). Пара цветов называется *хорошей*, если найдутся две соседние клетки, закрашенные этими цветами. Каково минимальное число хороших пар?

Для самостоятельного решения

СГ1. Клетчатый квадрат 8×8 разрезали по границам клеток на три многоугольника одинакового периметра. Найдите наибольшее возможное значение этого периметра.

СГ2. Какое наибольшее число клеток доски 9×9 можно разрезать по обеим диагоналям, чтобы при этом доска не распалась на несколько частей?