

Бесконечные алгоритмы

Рабочий несет домой со стройки один кирпич.
– Что ж всего один-то? – удивляется охранник.
– А я не ленивый, еще не раз схожу...

1. Состав из конечного числа одинаковых вагонов замкнут в кольцо. Тебя с куском мела поместили в один из вагонов. Ты можешь свободно ходить по составу и делать любые пометки на стенах вагонов. В любой момент ты можешь сказать, сколько вагонов в поезде. Если угадаешь, то тебя выпустят (а иначе – конец). Учти, однако, что до тебя уже многие пытались пройти это испытание. Возможно, они оставляли на стенах какие-то пометки. Опиши алгоритм, который поможет спастись *наверняка*.
2. На бесконечном шоссе находятся полицейская машина (ездит со скоростью до 100 км/ч) и вор на угнанном мотоцикле (ездит со скоростью до 80 км/ч). Полицейские не знают, в каком месте шоссе находится вор. Как им действовать, чтобы наверняка догнать вора? (Вор не может съехать с шоссе или спрятаться).
3. Петя задумал натуральное число. Вася каждым ходом называет натуральное число. Если он называет текущее Петино число, то Петя говорит «Я проиграл». Иначе Петя меняет текущее число по такому правилу: если его текущее число p не взаимно просто с названным Васей числом v , то он меняет p на p^v+1 , иначе – на p^v+2 . Может ли Вася действовать так, чтобы наверняка выиграть за конечное число ходов?
4. В таблице две строки и бесконечно много столбцов. В каждой строке и каждом столбце все числа различны. Докажите, что можно выбрать бесконечно много столбцов так, чтобы все числа в выбранных столбцах были различны.
5. Два бога Перун и Велес по очереди выписывают цифры бесконечной десятичной дроби. Перун своим ходом приписывает в хвост любое конечное число цифр, Велес – одну. Так продолжается, пока не будет выписана *вся бесконечная* дробь. Если в итоге она получится периодической (без предпериода), выигрывает Перун, иначе – Велес. Кто выиграет при наилучшей игре сторон?
6. Ахмад построил последовательность из 2015 различных натуральных чисел, где для любого $k \leq 2015$ сумма первых k чисел делилась на k . Докажите, что последовательность можно продолжить до бесконечности с сохранением условия о делимости и так, чтобы каждое натуральное число встретилось ровно один раз.

Зачетные задачи

БА1. Петя и Вася играют на бесконечной в обе стороны клетчатой полоске, вначале пустой. Ходят по очереди, начинает Петя. За ход Петя ставит два крестика в любые две пустые клетки. Вася за один ход стирает одну группу крестиков, идущую подряд без пробелов. Может ли Петя получить группу из не менее чем 2015 крестиков подряд?

БА2. Назовем лабиринтом шахматную доску 8×8 , где между некоторыми полями вставлены перегородки. По команде ВПРАВО ладья смещается на одно поле вправо или, если справа край доски или перегородка, остается на месте; аналогично выполняются команды ВЛЕВО, ВВЕРХ и ВНИЗ. Бог пишет программу – конечную последовательность указанных команд, и дает её чёрту, после чего чёрт выбирает лабиринт и помещает в него ладью на любое поле. Докажите, что бог может написать такую программу, что ладья обойдет все доступные поля в лабиринте при любом выборе чёрта.

БА3. На бесконечной шахматной доске ходят по очереди белый ферзь и невидимый черный король. Король не может ходить под шах и объявляет вслух, когда получит шах. Он объявил, что ему шах по горизонтали и сделал ход. Может ли ферзь наверняка добиться еще одного шаха?