Индукция

Математическая индукция помогает коротко записать строгое решения, но не объясняет, как его придумать, и в чем его смысл.

Индуктивное построение. Наиболее оправдано применение индукции при построении сложных конструкций, когда очередной этаж строится на основе уже построенных нижних этажей. Такое построение может быть при необходимости преобразовано в явный алгоритм.

1. От прямоугольника с неравными сторонами отрезают квадрат со стороной, равной меньшей стороне прямоугольника. Если оставшаяся часть не квадрат, процесс повторяют. Докажите, что для любого n найдется прямоугольник, для которого процесс закончится ровно после n-го отрезания, причем все отрезанные квадраты будут разного размера.

2. В компании из n человек ($n \geq 4$) каждый узнал по новости. Созвонившись, двое рассказывают друг другу все известные им новости. Как за $2n-4$ звонка все смогут узнать все новости?

Целься сверху. Если конструкция для $n+1$ не единственна, то связь с конструкцией для n надо осуществлять «спуском из $n+1$», а не «подъёмом из n». В частности, надо убедиться, что всякая конструкция для $n+1$ получается из конструкции для n.

3. Докажите, что у клетчатого многоугольника площади n периметр не превосходит $2n+2$.

Доказывай больше

Для шага индукции может потребоваться больше свойств, чем мы хотим доказать. Нередко эти дополнительные свойства доказывают тоже по индукции, расширив на них доказываемое утверждение. Например, вместо неравенства $1/1\cdot2 + 1/2\cdot3 + \ldots + 1/(n-1)n < 1$ легче доказывать равенство $1/1\cdot2 + 1/2\cdot3 + \ldots + 1/(n-1)n = 1 - 1/n$.

4. Дан правильный треугольник со стороной 1. За один ход можно увеличить одну из сторон треугольника, но так, чтобы он остался треугольником. Докажите, что после n ходов наибольшая сторона будет меньше $(n+2)$-го члена ряда Фибоначчи 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, …

Рекурсия

Редукция сводит решение задачи к более простой. Пусть удается свести к такой же задаче с меньшим значением полуинварианта. Если полуинвариант не может уменьшаться бесконечно, а для его крайних значений задача решена, то это – *рекурсия*. Такую *цепочку редукций* тоже оформляют как индукцию, объявляя полуинвариант параметром индукции.

5. Докажите, что сумма углов в невыпуклом n-угольнике равна $180°(n-2)$.

6. В городе 100 домов. Какое наибольшее число замкнутых непересекающихся заборов можно построить так, чтобы любые два забора ограничивали разные группы домов?

Зачетные задачи

И1. В классе каждый болтун дружит хотя бы с одним молчуном. При этом болтун молчит, если в кабинете находится нечетное число его друзей-молчунов. Докажите, что учитель может пригласить на факультатив не менее половины класса так, чтобы все болтуны молчали.

И2. Есть гири с номерами от 1 до n, для каждого k вес k-й гирьки целый и не превосходит k, а сумма всех весов чётна. Докажите, что все гири можно разбить на две кучки равного веса.

И3. Натуральное число называется *зеброй*, если оно либо однозначно, либо в его записи строго чередуются четные и нечетные цифры. Докажите, что всякое натуральное число, начиная с числа 3, можно представить в виде суммы трех зебр.

И4. В вершинах связного графа с n вершинами записано по два положительных числа: синее и красное, причем сумма синих равна сумме красных. За один ход можно изменить два синих числа в концах любого одного ребра так, чтобы чтобы они остались положительными и сумма сохранилась. Докажите, что не более чем за $n-1$ ход можно добиться, чтобы в каждой вершине синее число стало равно красному.