Зацикливание вперед и назад

Принцип зацикливания. Если система может находиться лишь в конечном числе состояний, и каждое следующее состояние зависит лишь от фиксированного числа предшествующих состояний, она с некоторого момента зациклится.

1. В последовательность цифр 201360095…каждая цифра, начиная с 11-й, равна последней цифре суммы нескольких предыдущих цифр, а именно: количество слагаемых равно предыдущей цифре, а если предыдущая цифра – 0, то берется 10 слагаемых. Докажите, что **а)** эта последовательность периодична; **б)** её период строго меньше 10^{10}; **в)** её период строго меньше $10^{10}–1$.

2. Незнайка составил программу для компьютера с ограниченной внешней памятью, которая печатает по 100 цифр каждую секунду. Незнайка утверждает, что если компьютеру позволить работать бесконечно долго, то он напечатает в точности десятичную запись числа $\sqrt{2}$. Прав ли он?

3. Кубик Рубика выведен из первоначального состояния некоторой комбинацией поворотов. Докажите, что всегда можно вернуть его в исходное состояние, выполнив эту комбинацию еще несколько раз.

Принцип зацикливания назад. Если система зацикливается, и каждое предыдущее состояние однозначно восстанавливается по фиксированному числу последующих,то система зацикливается без предпериода.

4. а) В последовательности чисел каждое число, начиная с 3-го, равно остатку от деления произведения двух предыдущих чисел на 33. В последовательности нет нулей. Обязательно ли она периодична без предпериода?

б) То же, но делят с остатком на 23.

5. В тридесятом королевстве у каждого замка и каждой развилки сходятся по три дороги. Рыцарь, Любящий Разнообразие, выехал из своего замка и по очереди поворачивает то направо, то налево. Докажите, что рано или поздно он приедет к своему замку.

6. Установлено, что погода на Сириусе в данный день полностью определяется предыдущей неделей. Варианты погоды: магнитная буря, метеоритный дождь, штиль. Последнюю неделю шел метеоритный дождь. Докажите, что “дождливые” недели всегда были и будут.

7. По кругу расставлено несколько коробочек. В каждой из них может лежать один или несколько шариков (или она может быть пустой). Ход состоит в том, что из какой-то коробочки берутся все шарики и раскладываются по одному, двигаясь по часовой стрелке, начиная со следующей коробочки.
а) Пусть на каждом следующем ходу разрешается брать шарики из той коробочки, в которую был положен последний шарик на предыдущем ходу. Докажите, что в какой-то момент повторится начальное расположение шариков.
б) Пусть теперь на каждом ходу разрешается брать шарики из любой коробочки. Верно ли, что за несколько ходов из любого начального расположения шариков по коробочкам можно получить любое другое?

Зачетные задачи

ЦН1. В последовательности цифр 1, 3, 6, 0, 5, ... n-я цифра равна последней цифре суммы $1+2+…+n$ (для каждого натурального n). Докажите, что последовательность периодична и найдите её наименьший период.

ЦН2. Назовем *самой частой* цифрой числа любую из цифр, встречающихся в его десятичной записи не меньшее число раз, чем каждая из остальных цифр (у некоторых чисел частых цифр несколько). Саша составляет бесконечную последовательность цифр: на n-е место он ставит любую из самых частых цифр числа n. Может ли Саша получить последовательность, периодическую с некоторого места?

ЦН3. Докажите, что среди чисел Фибоначчи 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13 ... бесконечно много кратных 2015.

ЦН4. Последовательность задана рекуррентным соотношением $x_{n+1}=[x_n]\{x_n\}$. Известно, что $–2<x_1<–1$.
Докажите, что эта последовательность периодична (возможно, с предпериодом).