Периодичность и непериодичность. Зацикливание.

1. Найдите последнюю цифру числа $777^{555^{333}}$.

Определение. Последовательность $a_1, a_2, \dots, a_k, \dots$ называется *периодической* с периодом *T*, если $a_{n+T} = a_n$ для всех *n*. Может случиться, что правило не действует для нескольких первых членов, начиная действовать с *n*=*k*. Тогда начало последовательности $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}$ называется *предпериодом*. Последовательности *складывают* и *вычитают* почленно.

2. Может ли сумма двух последовательностей с предпериодами быть периодической последовательностью без предпериода?

3. Может ли сумма двух бесконечных последовательностей с периодами 4 и 5 быть периодической последовательностью периода 2, если в каждой последовательности не все члены равны?

4. Оставим в периодической последовательности $a_1, a_2, \dots, a_k, \dots$ только члены вида $a_N, a_{N+d}, \dots, a_{N+kd}, \dots$, (для некоторых натуральных *N* и *d*). Докажите, что снова получится периодическая последовательность.

5. Существует ли непериодическая последовательность только из единиц и двоек?

6. В каждом числе последовательности 10, 11, 12, 13, ... , 2014, 2015, ... вычеркнули все цифры, кроме двух первых. Докажите, что получилась непериодическая последовательность.

Указание. «Плохое свойство» (например, непериодичность) удобно доказывать «от противного»: ведь противное в этом случае – хорошее!

7. **а)** Последовательность периодична с периодом 7. В ней оставлены только 1-й, 10-й, 100-й, 1000-й и т.д. члены. Докажите, что полученная последовательность – периодична.

б) Последовательность периодична. В ней оставлены только члены, чьи номера образуют геометрическую прогрессию. Докажите, что полученная последовательность – периодична.

Принцип зацикливания. Если система может находиться лишь в конечном числе состояний, и каждое следующее состояние зависит лишь от фиксированного числа предшествующих состояний, она с некоторого момента зациклится.

8. В последовательность цифр 201360095…каждая цифра, начиная с 5-й, равна последней цифре суммы четырёх предыдущих. Докажите, что эта последовательность периодична.

9. Теорема. Число представляется в виде периодической дроби тогда и только тогда, когда оно рационально.

Зачетные задачи

ПЦ1. Докажите, что среди чисел Фибоначчи 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ... бесконечно много **а)** кратных 3; **б)** кратных 17.

ПЦ2. Докажите, что бесконечная десятичная дробь 0,123456789101112…20092010… – иррациональное число. *(Сдавать письменно)*

ПЦ3. В конечной последовательность из *N* членов не все числа одинаковы. Она периодична одновременно с двумя периодами

a) 13 и 14;

b) *p* и *q* (где *p* и *q* – взаимно просты).

Каково наибольшее значение *N*?

ПЦ4 Последовательность задана рекуррентным соотношением $x_{n+1} = 1 - |1 - 2x_n|$ и $0 \le x_1 \le 1$. Докажите, что последовательность периодична ⇔ число x_1 рационально.