

## Комбинаторная геометрия: Покрывтия

Кроме геометрических теорем, в комбигеометрии работает принцип узких мест и соответствие. В задачах на покрытие широко применяются оценки; часто работает идея посредника.

1. Петя разрезал на две части квадрат со стороной 2 дм. Докажите, что он не сможет накрыть ими равносторонний треугольник со стороной 3 дм.
2. Треугольником  $P$  можно накрыть треугольник  $Q$ . Докажите, что вписанным кругом треугольника  $P$  можно накрыть вписанный круг треугольника  $Q$ .
3. На плоскости нарисовано множество единичных отрезков, каждые два имеют общую точку. Докажите, что все отрезки можно накрыть
  - а) кругом радиуса 2;
  - б) кругом радиуса 1,5;
  - в) квадратом со стороной 2;
  - г) кругом радиуса 1.
4. На стол положили несколько одинаковых листов бумаги прямоугольной формы. Оказалось, что верхний лист покрывает больше половины площади каждого из остальных листов. Можно ли в таком случае воткнуть булавку так, чтобы она проколола все прямоугольники?
5. На сторонах остроугольного треугольника как на диагоналях построены три квадрата. Докажите, что они вместе покрывают треугольник.
6. а) На столе лежат пять одинаковых *равносторонних* бумажных треугольников. Каждый из них разрешается сдвигать в любом направлении, не поворачивая. Докажите, что любой из этих треугольников можно накрыть четырьмя другими.  
б) На столе лежат пять одинаковых бумажных треугольников. Каждый из них разрешается сдвигать в любом направлении, не поворачивая. Верно ли, что любой из этих треугольников можно накрыть четырьмя другими?
7. Найдутся ли 100 прямоугольников таких, что никакой из них нельзя покрыть остальными 99-ю вместе?
8. а) Квадрат разрезан на треугольники. Докажите, что хотя бы один из них можно покрыть остальными вместе.  
б) Параллелограмм разрезан на выпуклые многоугольники. Докажите, что хотя бы один из них можно покрыть остальными вместе.
9. Единичный квадрат разрезан на  $n$  треугольников. Докажите, что одним из треугольников можно накрыть квадрат со стороной  $1/n$ .
10. Пирамиду разрезали по боковым ребрам, и каждую из боковых граней повернули вокруг соответствующего ребра основания так, чтобы она накрыла (хотя бы частично) основание. Докажите, что основание покрыто полностью.

### Дополнительные задачи

- По1.** Дан остроугольный треугольник  $ABC$ . Его покрывают тремя кругами, центры которых лежат в вершинах, а радиусы равны высотам, проведённым из этих вершин. Доказать, что каждая точка треугольника покрыта хотя бы одним из кругов.
- По2.** Длина проекции фигуры  $\Phi$  на любую прямую не превосходит 1. Верно ли, что  $\Phi$  можно накрыть кругом диаметра: а) 1; б) 1,5?
- По3.** Докажите, что любой жесткий плоский треугольник  $T$  площади меньше четырёх можно просунуть сквозь треугольную дырку  $Q$  площади 3.
- По4.** Докажите, что любой треугольник можно разрезать на три меньших треугольника так, чтобы каждую из получившихся частей можно было покрыть двумя другими.

**По5.** Дан выпуклый пятиугольник, все углы которого тупые. Докажите, что в нем найдутся две такие диагонали, что круги, построенные на них как на диаметрах, полностью покроют весь пятиугольник.

Барнаул 2015, 14 мая. 10 класс, А.Шаповалов [www.ashap.info/Uroki/Altaj/index.html](http://www.ashap.info/Uroki/Altaj/index.html)