Линейные системы. Рациональный трюк.

Трудные задачи

Т1. Есть 10 бананов. За какое наименьшее число взвешиваний на чашечных весах без гирь можно убедиться, что все бананы весят одинаково?

Т2. Двое разбойников отобрала у купца мешок золотых слитков. Оказалось, что какой бы слиток ни отложить, оставшиеся слитки можно разделить между разбойниками так, чтобы каждый получил золота поровну (по весу). Докажите, что общее число слитков нечётно.

Системы линейных уравнений

1. По кругу расставили 6 чисел так, что среди сумм подряд идущих троек встретились все натуральные числа от 1 до 6. Могут ли все расставленные числа быть а) целыми; б) различными; в) положительными?

Определения. *Линейное уравнение* от n неизвестных – это уравнение вида $a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n=d$, где коэффициенты a_1, a_2, ..., a_n, d – числа. Мы будем рассматривать *линейные системы* из m уравнений с n неизвестными. *Решение системы* – это строка из n чисел. Система называется *однородной*, если все ее свободные члены равны 0.

2. Будем строки складывать и умножать на числа *покоординатно.*
а) Пусть P и Q – решения линейной системы. Докажите, что строка $(P+Q)/2$ – тоже решение этой системы.
б) Пусть P и Q – решения однородной линейной системы. Докажите, что для любых чисел a и b строка $aP+bQ$ – тоже решение этой системы.
в) Пусть P – решение неоднородной линейной системы, а Q – решение соответствующей однородной (полученной из неоднородной заменой всех свободных членов на 0). линейной однородной системы. Докажите, что для любого числа а строка $P+aQ$ – тоже решение этой системы (строки складываем и умножаем покоординатно).

3. а) Докажите что у однородной линейной системы уравнений может быть либо одно, либо бесконечно много решений.
б) Докажите, что у неоднородной системы линейных уравнений может быть либо 0, либо 1, либо бесконечно много решений.

4. Найдите число решений системы $x_1+x_2=0$, $x_2+x_3=0$, …, $x_{n-1}+x_n=0$, $x_n+x_1=0$
а) при нечетном n; **б)** при чётном n.

Теорема 5. Если система из n уравнений с n неизвестными имеет единственное решение при каком-то наборе свободных членов, то она имеет единственное решение при любом наборе свободных членов.

Определение. Пусть у линейной системы есть решение. Упростим систему равносильными преобразованиями: будем по одной исключать неизвестные, выражая их через другие в виде суммы с числовыми коэффициентами. Если решение не единственно, то в итоге останутся $k>0$ неизвестных, чьи значения можно задавать свободно, а остальные можно последовательно выразить через эти k *свободных*. Набор свободных неизвестных зависит, конечно, от порядка исключения неизвестных.

Теорема (без доказательства). Число свободных неизвестных не зависит от порядка их исключения.

Определение. Число свободных неизвестных называется *размерностью* множества решений.

6. Рассматриваются таблицы 3×3, где суммы чисел в каждой строке в каждом столбце равны 1. Представьте множество таких таблиц как множество решений линейной системы и найдите его размерность.

7. Докажите, что размерность решений системы из k уравнений с n неизвестными не меньше $n–k$.

8. а) Докажите, что если у однородной линейной системы неизвестных на 2 больше, чем уравнений, то найдется решение, где не все переменные равны. **б)** Решите Т1.

Рациональный трюк

9. Петя записал по числу в каждую клетку доски 8×8. За один вопрос Вася узнавал сумму клеток в каком-нибудь прямоугольнике. Он задал Пете 64 вопроса, получил 64 ответа. **а)** Вася доказал, что не все ответы были правильными. Докажите, что если бы Петя ни разу не ошибся, то Вася все равно не смог бы однозначно восстановить все числа на доске. **б)** По ответам Вася смог однозначно восстановить все числа. Известно, что все Петины ответы были целыми числами. Верно ли, что все числа в клетках были рациональными?

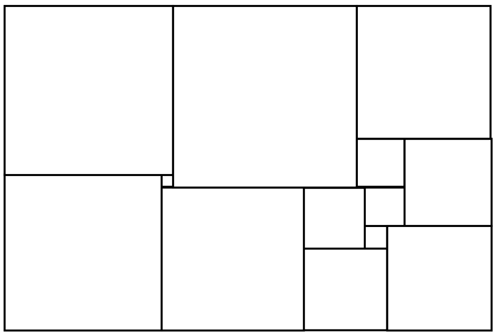
Предложение 10. Если линейная система с целыми коэффициентами имеет какое-то решение, то она имеет решение в рациональных числах.

11. У Пети было несколько яблок. Он проделал с ними несколько взвешиваний на чашечных весах без гирь, и каждый раз получал равенство. Докажите, что можно приписать каждому яблоку цену в натуральное число копеек так, чтобы при каждом из проведенных взвешиваний цены чаш были одинаковы.

12. а) Двое разбойников отобрали у купца мешок золотых монет. Каждая монета стоит целое число грошей. Оказалось, что какую бы монету ни отложить, остальные можно разделить между разбойниками так, чтобы каждый получил поровну грошей. Докажите, что число монет нечетно. **б)** Решите задачу Т2.

Домашнее задание

ЛС1. На рисунке приведено разрезание прямоугольника на квадраты с целыми сторонам. Найдите стороны квадратов, если известно, что у них нет общего делителя больше 1.



ЛС2. а) Есть $2n+1$ камней, каждый весит целое число граммов. Известно, что убрав любой из камней, можно оставшиеся разложить на две равные по количеству и весу кучки. Докажите, что все камни весят одинаково.
б) То же, но веса камней – рациональны.
в)* То же, но веса камней – действительны.
(Все веса положительны).

ЛС3. а) Дана схема разрезания прямоугольника на квадраты (типа схемы в задаче ЛС1). Известно, что есть хотя бы одно разрезание по такой схеме. Докажите, что для заданного значения нижней стороны такое разрезание ровно одно.
б) Прямоугольник можно разрезать на квадраты. Докажите, что его можно разрезать на равные квадраты.

Указание к **а)** Если есть много разрезаний, зависящих от параметра t, то длина другой стороны прямоугольника зависит от t линейно, а площадь – квадратично.