Увидеть граф-1: связность графа

Считаем ребра, вершины и компоненты без циклов. Обозначим в графе В – число вершин, Р – число ребер, С – число компонент связности.

Факт 1. а) В дереве (то есть связном графе без циклов) В=Р+1.

б) В графе без циклов В=Р+С

Факт 2. а) В связном графе Р≥В–1. **б)** В любом графе Р≥В–С.

1. Какое наибольшее число рёбер можно перекусить в проволочном каркасе додекаэдра так, чтобы каркас не развалился на части?

2. Пусть дан связный граф с n вершинами и k ребрами, причем $k>n-1$. Докажите, что можно удалить ребро так, чтобы граф остался связным.

3. В многоугольнике проведены все диагонали из одной вершины. Можно ли стороны и проведенные диагонали раскрасить в жёлтый и красный цвета так, чтобы жук мог проползти из любой вершины в любую другую по жёлтым отрезкам, а клоп – по красным?

4. Из спичек сложена шахматная доска. Жук через спичку не ползает. Убрав часть спичек внутри доски, получаем *лабиринт.* Назовем его *связным*, если жук может проползти между любыми двумя клетками. Каких лабиринтов можно получить больше: связных или не связных?

Увидеть граф за условием задачи помогают *выделенные* пары объектов, в частности, соседние объекты или клетки с общей границей. Выписывая для таких графов уравнения и неравенства для В, Р, С, можно получать нетривиальные оценки.

5. Есть m болельщиков: некоторые из них (возможно, все или никто) болеют за «Спартак», а остальные – за «Динамо». Разрешается спросить у любых двоих, болеют ли они за разные команды, и они честно ответят «да» или «нет». Требуется посадить болельщиков в два автобуса так, чтобы в каждом были болельщики только одной команды. За какое минимальное количество вопросов это наверняка можно сделать?

6. Тетрадный лист раскрасили в 23 цвета по клеткам (при этом все цвета присутствуют). Пара цветов называется *хорошей*, если найдутся две соседние клетки, закрашенные этими цветами. Каково минимальное число хороших пар?

7. По кругу расположены монеты, чередуясь: три подряд орлом вверх, три подряд – решкой, три – орлом, три – решкой и т. д – всего 10 групп по 3 монеты. Если у монеты двое соседей лежат по-разному, ее можно перевернуть. Какое наибольшее число монет можно положить орлом вверх с помощью таких операций?

8. На клетчатой бумаге нарисован многоугольник площадью в n клеток. Его контур идёт по линиям сетки. Каков наибольший периметр многоугольника? (Сторона клетки равна 1).

9. Дан клетчатый прямоугольник $m\times n$. Каждую его клетку разрезали по одной из диагоналей. На какое наименьшее число частей мог распасться прямоугольник?

10. Дана доска $m\times n$, разбитая на единичные клетки. Сначала в $(m-1)(n-1)+1$ клеток ставится по фишке. Назовем *квартетом* четверку клеток **а)** в квадратике 2 на 2; **б)** в вершинах прямоугольника со сторонами, параллельными краям доски.

Если в квартете есть ровно одна фишка, ее разрешается снять. Докажите, что разрешенными операциями нельзя снять все фишки.

11. Хозяйка испекла для гостей пирог. За столом может оказаться либо p человек, либо q. На какое минимальное количество кусков (не обязательно равных) нужно заранее разрезать пирог, чтобы в любом случае его можно было раздать поровну? Рассмотрите
случаи:

а) p и q – взаимно простые числа;

б) p и q имеют наибольший общий делитель $d>1$.

Про граф полезно знать, что он связный. Тут могут помочь два несложных соображения.

Факт 3. Если в графе каждая вершина связана с выделенной вершиной («столицей»), то граф связен.

Факт 4. Если в графе есть всего две вершины нечетной степени, они лежат в одной компоненте связности.

12. В ряд стоят фишки 1, 2, …, 2015 в некотором порядке. Докажите, что прыжками через 3 фишки можно переставить их в любом другом порядке.

13. Клетки прямоугольной клетчатой доски покрашены в синий и желтый цвета так, что крайняя нижняя горизонталь – синяя. Известно, что ладья не может пройти с нижнего края до верхнего по синим клеткам не прыгая через желтые. Докажите, что

а) червяк может проползти по границам синих и желтых клеток от левого края до правого.

б) король может пройти по желтым клеткам от левого края до правого.

На дом

СГ1. В классе 30 человек. За месяц было 29 дежурств, в каждом дежурила пара учеников. Докажите, что можно так выставить всем ученикам класса по одной оценке по 5-балльной шкале, что будет выставлена хотя бы одна пятерка, и в каждой паре дежуривших сумма оценок будет равна 8.

СГ2. Какое наибольшее число клеток доски 9×9 можно разрезать по обеим диагоналям, чтобы при этом доска не распалась на несколько частей?

СГ3. Есть 101 банка консервов весами 1001 г, 1002 г,..., 1101 г. Этикетки с весами потерялись, но завхозу кажется, что он помнит, какая банка сколько весит. Он хочет убедиться в этом за наименьшее число взвешиваний.

а) У завхоза есть двое чашечных весов: одни точные, другие – грубые. За одно взвешивание можно сравнить две банки. Точные весы всегда показывают, какая банка тяжелее, а грубые – только если разница больше 1,1 г (а иначе показывают равновесие). Завхоз может использовать только одни весы. Какие ему следует выбрать?

б) У завхоза есть только грубые весы. Какое наименьшее число взвешиваний ему понадобится?

СГ4. По кругу расставлено несколько коробочек. В каждой из них может лежать один или несколько шариков (или она может быть пустой). Ход состоит в том, что из какой-то коробочки берутся все шарики и раскладываются по одному, двигаясь по часовой стрелке, начиная со следующей коробочки.

а) Пусть на каждом следующем ходу разрешается брать шарики из той коробочки, в которую был положен последний шарик. Докажите, что в какой-то момент повторится начальное расположение шариков.

б) Пусть теперь на каждом ходу разрешается брать шарики из любой коробочки. Докажите, что если из расположения А можно получить расположение Б, то из Б можно получить А.

в) В условиях (б) докажите, что за несколько ходов из любого начального расположения шариков по коробочкам можно получить любое другое.