Группы преобразований

***Определение* 1**. Обозначим $G(A)$ множество биекций $f\colon A\to A$. Назовем подмножество $H\in G(A)$ *группой*, если выполнены 3 условия: **а)** $Id_A\in H$; **б)** если $f\in H$, то и $f^{-1}\in H$; **в)** если $f,g\in H$, то и $f\circ g\in H$.

Число элементов или мощность H называются *порядком группы*.

Примеры групп: **а)** $\{Id_{П}, S_a\}$; **б)** повороты вокруг одной точки; **в)** группа подстановок $S_n=G(\{1, 2, \ldots, n\})$; **г)** группа четных подстановок $A_n\subset S_n$.

Упр1. Найдите порядки групп для предыдущих примеров.

Упр2. Какие из данных множеств преобразований плоскости – группы:
а) параллельные переносы; **б)** движения; **в)** осевые симметрии; **г)** повороты; **д)** движения с неподвижной точкой O?

Упр3. Пусть A – множество из 10 элементов. Приведите пример группы $H\in G(A)$ порядка

а) 7 **б)** 14 **в)** 15.

***Определение* 2**. Пусть g – элемент группы H. Наименьшее натуральное n, для которого $g^n=Id$ называется *порядком элемента* g (порядок может быть и бесконечным).

Упр4. Каков порядок **а)** осевой симметрии; **б)** параллельного переноса; **в)** поворота на $30^{о}$?

Зад5. Для каких углов поворот на этот угол имеет конечный порядок?

***Определение* 3.** Если $H\subset G(A)$, то говорят, что задано *действие группы H на множестве A*. *Орбита $H(a)$* элемента $a\in A$ – это множество всех тех элементов, в которые переходит a под действием преобразований из H. *Порядок орбиты* – это число элементов (или мощность) орбиты.

Пример. Для группы $\{Id_{П}, S_a\}$ все орбиты одно- или двухточечные; для группы поворотов вокруг точки O – окружности.

Упр6. Нарисуйте орбиты групп **а)** переносов, параллельных прямой a; **б)** гомотетий с центром в точке O.

Упр7. Докажите, что порядок орбиты не больше порядка группы.

Пред8. Орбиты двух элементов не пересекаются либо полностью совпадают.

Замечание. Часто действие группы $H\subset G(A)$ определено не только на множестве A, но и на других множествах. Всегда определено действие на множества всех подмножеств A. Кроме того, движения действуют на классах фигур (окружностей, треугольников, прямых), а также на множестве векторов.

Упр9. Каковы орбиты действия групп из упражнения 6 на множестве прямых?

***Определение* 4.** *Подгруппа* – это подмножество группы, являющееся группой.

Например, в группе поворотов вокруг O есть подгруппа подгруппа поворотов на углы, кратные 40°.

Упр10. Найдите все подгруппы группы S_3.

Упр11. Все степени данного элемента (включая нулевую и отрицательные) образуют подгруппу. (Её называют *подгруппой, порожденной элементом.)*. Порядок этой подгруппы равен порядку порождающего её элемента.

Упр12. У группы порядка 30 есть орбита из 10 элементов. Докажите, что для каждого элемента орбиты найдутся **а)** 2; **б)** 3 преобразования, которые оставляют его неподвижным (переводят в себя).

Определение **5.** Множество элементов группы, оставляющих данную точку *а* неподвижной, называется *стабилизатором* точки и обозначается $St(a)$.

Упр13. Докажите, что стабилизатор точки – подгруппа.

Зад14. Группа G – конечна, и в ней больше элементов, чем в орбите точки a. Докажите, что в $\mathrm{St}(a)$ более одного элемента.

Теорема 15. Пусть H – конечная группа преобразований множества A, $a \in A$, $H(a)$ – орбита точки a. Тогда $|H|=|H(a)|\cdot|\mathrm{St}(a)|$.

Следствие 16. Порядок орбиты делит порядок группы.

Определение 6. Пусть H – подгруппа в G. Для каждого $h \in H$ зададим отображение *левого сдвига* $L_h{:}G \to G$ по правилу: $L_h(g)=h \circ g$.

Лемма 17. Докажите, что **а)** левый сдвиг – это биекция; **б)** $L_a \circ L_b = L_{a \circ b}$. (то есть, левые сдвиги задают действие H на G); **в)** все орбиты равномощны H.

Теорема 18 **(Лагранж).** Порядок подгруппы конечной группы делит порядок группы.

Следствие 19. Порядок элемента конечной группы делит порядок группы.

Зад20. Группа порядка 25 действует на множестве из 100 точек. Некоторая точка остается неподвижной при действии любого элемента группы. Докажите, что неподвижных точек по крайней мере 5.

***Зад*21**. Докажите, что всякая группа простого порядка коммутативна, то есть $x*y= y*x$ для любой пары элементов.

Для самостоятельного решения

Пре1. Докажите, что угол между осями симметрии любого многоугольника измеряется рациональным числом градусов.

Пре2 Докажите, что если в группе есть два поворота вокруг разных точек, то группа бесконечна.

Пре3. Каков наибольший порядок элемента в группе S_{20}?

Пре4. Одно из движений конечной группы движений плоскости – симметрия. Докажите, что эта группа четного порядка.

Пре5. Докажите, что если в группе квадрат любого элемента равен Id, то группа коммутативна.