Группы подстановок

Повторение. *Движение* плоскости – это преобразование, переводящее точки в точки, которое сохраняет расстояние между точками.
Теорема Шаля. Всякое преобразование плоскости есть *параллельный перенос*, *поворот*, *симметрия* относительно оси либо *скользящая симметрия*.

1. У плоской фигуры есть ровно две оси симметрии. Докажите, что они перпендикулярны.

Определение. *Самосовмещением* фигуры F назовем движение плоскости, переводящее каждую точку фигуры F в ту же или другую точку F.

2. Сколько самосовмещений у:
а) прямоугольного равнобедренного треугольника;
б) правильного треугольника;
в) ромба;
г) квадрата?

3. Докажите, что композиция самосовмещений фигуры Ф и обратное движение – тоже самосовмещения Ф.

4. Найдите фигуру, у которой ровно **а)** 10 самосовмещений; **б)** 7 самосовмещений.

Очевидно, что самосовмещение многоугольника задает биекцию на множестве его вершин; и, наоборот, зная, куда перейдут вершины, мы знаем и образы остальных точек. Такую биекцию можно записывать в два ряда, указывая под каждой вершиной ее образ. Например, симметрия правильного треугольника ABC относительно биссектрисы угла A запишется $\begin{pmatrix} A & B & C \\ A & C & B \end{pmatrix}$.

5. Запишите так **а)** поворот 6-угольника на 60°; **б)** симметрию его относительно диагонали; **в)** композицию этих самосовмещений.

6. Выпишите в таком виде все самосовмещения правильного треугольника и составьте их «таблицу умножения».

Определение. *Подстановкой* на конечном множестве назовем его биекцию. *Группа подстановок* S_m – все подстановки множества $\{1, 2, \ldots, m\}$.

Очевидно, что в него входит тождественная подстановка, вместе с каждой подстановкой входит обратная к ней, и вместе с каждой парой подстановок их композиция. Обычно композицию называют просто умножением и говорят о произведении подстановок.

7. Сколько всего подстановок в S_m?

8. Составьте таблицу умножения для S_3.

Определение. Подстановка называется *циклической* (или просто *циклом*), если она сдвигает некоторые элементы по кругу, а остальные оставляет неподвижными. Два цикла называются *независимыми*, если никакой элемент не сдвигается и первой, и второй подстановкой одновременно.

Запись цикла. $(a\ b\ c\ d\ \ldots x) = \begin{pmatrix} a\,b\,c \ldots x \\ b\,c\,d \ldots a \end{pmatrix}$

9. Найдите композиции в S_5: **а)** $(134)\circ(235)$; **б)** $(23)\circ(245)$; **в)** $(245)\circ(23)$.

10. Запишите в виде композиции независимых циклов следующие подстановки: **а)** $\begin{pmatrix} 12345 \\ 45312 \end{pmatrix}$; **б)** $\begin{pmatrix} 123456 \\ 316542 \end{pmatrix}$.

11. Докажите, что любая подстановка есть композиция независимых циклов.

Четные и нечетные подстановки.

Определение. Цикл длины два называется *транспозицией*. Транспозиция, меняющая местами два соседних числа, называется *элементарной*.

12. Докажите, что любая подстановка есть композиция **а)** транспозиций; **б)** элементарных транспозиций.

13. На книжной полке в библиотеке стоит собрание сочинений, состоящее из 2015 томов. В библиотеке работает комиссия. Если она обнаруживает пару томов на полке, расположенную так, что том с меньшим номером из этой пары стоит раньше тома с большим номером, то за каждую такую пару библиотекарь получает выговор.
а) Сколько выговоров получит библиотекарь, если все тома будут расположены в обратном порядке?
б) При некоторой расстановке книг библиотекарь получил некоторое количество выговоров. Он поменял местами две книги. Могло ли случиться, что число выговоров увеличилось на 100?
в) Библиотекарю удалось расставить два экземпляра этого собрания сочинений в правильном порядке. В библиотеку забрались два хулигана. Каждый из них каждую секунду переставляет какие-нибудь две книги на своей полке. Может ли оказаться так, что у первого из них через 100 секунд книги будут расставлены точно так же, как у второго через 99 секунд?
г) Докажите, что книги можно расставить так, что библиотекарь получит ровно миллион выговоров.

Определение. Пусть дана некоторая перестановка на множестве чисел 1, 2,..., *n*. Пара чисел *i, j* называется *инверсией* данной перестановки, если большее из этих чисел расположено в перестановке раньше меньшего. Перестановка называется *четной* (*нечетной*), если четно (нечетно) число ее инверсий. Подстановка называется *четной* (*нечетной*), если четно (нечетно) число инверсий в перестановке, которая стоит в нижней строке её стандартной записи.

14. Найти четность: **а)** подстановки $\begin{pmatrix} 12345 \\ 25413 \end{pmatrix}$; **б)** произвольной транспозиции.

15. Докажите, что при умножении произвольной подстановки на транспозицию четность подстановки изменится.

16. Найдите четность цикла: **а)** длины 3; **б)** длины 4; **в)** произвольной длины *n*.

17. Докажите, что композиция подстановок одинаковой четности есть четная подстановка, а композиция подстановок разной четности – нечетная. Разрешается прыгать буквой через две соседние вправо или влево (например, из ИКС сделать КСИ). Можно ли с помощью таких операций превратить **а)** ГОРБ в ГРОБ; **б)** АВТОР в ОТВАР; **в)** АПЕЛЬСИН в СПАНИЕЛЬ?

18. В городе Урюпинске разрешены только тройные обмены квартир. Может ли в результате нескольких обменов получиться так, что семья Ивановых поменяется квартирами с семьей Петровых, а все остальные жители останутся при своих квартирах?

19. Доказать, что любая четная подстановка есть композиция циклов длины 3.

Для самостоятельного решения

ГП1. В городе Дублине разрешены только парные обмены квартир, и каждая семья может совершить только один обмен в день. Докажите, что любой сложный обмен (но при котором каждая семья отдает одну квартиру и получает одну квартиру) можно совершить за два дня.

ГП2. На книжной полке стоит собрание сочинений из N томов. За один раз можно любые два тома поменять местами друг с другом. За какое наименьшее число таких обменов можно наверняка поставить все тома по порядку?

ГП3. Какой минимальный набор транспозиций нужно взять, чтобы перемножая их, можно было получить любую подстановку n элементов?

ГП4. В «игре 15» в квадрат 4×4 уложены 15 квадратиков 1×1, пронумерованных от 1 до 15, а одна клетка – пустая. За один ход разрешается передвинуть на пустую клетку любой соседний с ней по стороне квадратик. Докажите, что такими ходами нельзя поменять две соседние фишки, сохранив все остальные на местах.