

Непрерывная комбинаторика: точки и сыр

В некоторых задачах возникают комбинации из *конечного* числа объектов, но сами объекты выбираются из *бесконечного* набора, заданного *непрерывным параметром* или параметрами.

Хорошей моделью в таких задачах служат наборы точек на прямой и окружности.

1. а) Из нескольких палочек надо сложить три отрезка одинаковой длины. Перед этим несколько раз можно распилить любую палочку или кусок на две части. Каким наименьшим числом распилов можно гарантированно обойтись?

б) Несколько кусков сыра требуется разложить на 7 кучек одинакового веса, разрезав предварительно несколько кусков на части. Каким наименьшим количеством разрезов можно гарантированно обойтись? (При любом разрезе один кусок распадается на два).

2. а) На окружности отмечено 25 точек. Докажите, что можно провести диаметр так, чтобы по обе его стороны было поровну этих точек.

б) На окружности отмечено нечетное число точек. Докажите, что можно поставить еще одну точку, и закрасить ровно половину дуг так, чтобы по длине оказалась покрашена ровно половина окружности.

в) Имеется 25 кусков сыра разного веса. Докажите, что можно один из этих кусков разрезать на две части и разложить сыр в два пакета так, что части разрезанного куска окажутся в разных пакетах, веса пакетов будут одинаковы и число кусков в пакетах также будет одинаково.

С группами точек можно поступать как с одним целым: переворачивать, сдвигать, сжимать или растягивать. Удачно выбранная операция помогает решить задачу.

3. а) Сколько целых чисел может лежать на отрезке числовой оси длины b ?

б) Сколько целых чисел может лежать на интервале числовой оси длины b ?

в) Известно, что число a положительно, а неравенство $1 < xa < 2$ имеет ровно 3 решения в целых числах. Сколько решений в целых числах может иметь неравенство $2 < xa < 3$?

Полезно помнить, что на любом, сколь угодно малом интервале найдется рациональное число.

4. Даны 100 различных чисел. Докажите, что

а) можно выбрать такое не равное им рациональное число q , чтобы оно было меньше ровно 75 из этих чисел

б) можно умножить все числа на одно и то же число так, чтобы ровно половина из них стала больше 1000.

5. а) Даны 3 пары положительных чисел: $a_1 < b_1$, $a_2 < b_2$, $a_3 < b_3$. Числа в каждой паре разрешается увеличить в целое число раз, для каждой пары в своё. Докажите, что можно добиться, чтобы все a_i стали меньше всех b_j .

б) Есть сто картинок, на каждой – взрослый и ребенок ростом поменьше (все двести человек на картинках разные). Из них надо собрать одну большую картину. При этом разрешается уменьшать видимый рост людей в целое число раз: эти целые числа могут быть разными для людей с разных картинок и должны быть одинаковыми для людей с одной картинке. Докажите, что можно добиться, чтобы на большой картине каждый взрослый имел рост больше каждого ребенка.

6. а) Вначале на отрезке длины 1000 отмечены только его концы. За одну операцию можно выбрать один из концов и дополнительно отметить все точки, которые в полтора раза ближе к выбранному концу, чем отмеченные ранее. Докажите, что за несколько таких операций можно добиться, чтобы отмеченные точки разбили отрезок на части длины меньше 1.

б) Есть два сосуда 3 и 5 литров без делений, два крана – с горячей и холодной водой и раковина для слива воды. Задана промежуточная температура (меньше температуры горячей, но больше температуры холодной воды). Докажите, что можно отмерить 3 литра воды с температурой, которая отличается от заданной не более, чем на 0,1 градуса.

в) То же, но отмерить 2 литра воды.

Среди всевозможных отрезков короче данного нет самого длинного: для каждого найдется еще длиннее. Для любой точки на интервале есть точка, более близкая к его концу.

7. Двое по очереди отмечают точки на окружности: первый — красным цветом, второй – синим. Когда отмечено по 2 точки каждого цвета, игра заканчивается. Затем каждый игрок находит на окружности дугу наибольшей длины с концами своего цвета, на которой больше нет отмеченных точек. У кого длина дуги больше — тот выиграл (в случае равенства длин дуг, а также

при отсутствии таких дуг у обоих игроков — ничья). Кто из играющих может всегда выигрывать, как бы ни играл соперник?

Домашнее задание

Сыр1. Задано $n > 2$. Двое по очереди отмечают точки на окружности: первый — красным цветом, второй — синим. Когда отмечено по n точек каждого цвета, игра заканчивается. Затем каждый игрок находит на окружности дугу наибольшей длины с концами своего цвета, на которой больше нет отмеченных точек. У кого длина дуги больше — тот выиграл (в случае равенства длин дуг, а также при отсутствии таких дуг у обоих игроков — ничья). Кто из играющих может всегда выигрывать, как бы ни играл соперник?

Сыр2. Есть несколько кусков сыра разного веса и разной цены за кг. Докажите, что можно, разрезав не более двух кусков, разложить куски на 2 кучки равные по весу и по цене.

Сыр3. а) 50 кусков сыра требуется разложить на 7 кучек одинакового веса с равным числом кусков, разрезав предварительно несколько кусков на части. Каким наименьшим числом разрезов можно гарантированно обойтись? (При разрезе один кусок распадается на два).

б) 50 кусков сыра разложены на 7 кучек одинакового веса. За одну операцию разрешается разрезать один кусок на два и поменять, если хочется, часть кусков из этой же кучки с кусками из какой-то другой кучки. Каким наименьшим числом операций можно гарантированно добиться, чтобы все кучки весили поровну и кусков в них тоже было поровну? (При разрезе один кусок распадается на два).

Сыр4. На столе лежат 10 кусков сыра. Петя берет себе самый маленький (по весу) кусок. Затем он режет один из кусков на столе на две части, и снова берет себе самый маленький из получившихся 10 кусков. Эти действия: разрезание и взятие куска — Петя повторяет, пока у него не наберется 9 кусков. Докажите, что Петя возьмет себе не более половины сыра (по весу).

Сыр5. Назовем *медианой* системы $2n$ точек плоскости прямую, проходящую ровно через две из них, по обе стороны от которой точек этой системы поровну. Какое наименьшее количество медиан может быть у системы из $2n$ точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой?