

Посредники в неравенствах

0. Квадрат со стороной 1 разрезан на прямоугольники. В каждом прямоугольнике выбрали одну из двух меньших сторон (если прямоугольник – квадрат, то выбрали любую из четырёх сторон). Докажите, что сумма всех выбранных сторон не меньше 1.

Идея. Чтобы доказать неравенство $A < B$ можно выбрать *посредник* P и доказать, например, $A < P$ и $P \leq B$. Искусство состоит в выборе P . В зад.0 посредником была сумма площадей частей.

1. Докажите, что $\sqrt[3]{1001} > \sqrt[4]{9999}$.

2. Есть 100 пар дедов Морозов со Снегурочками, каждый выше своей Снегурочки. Доказать, что если распределить Снегурочек по росту (самому высокому – самую высокую, и т.д.), то все равно каждый дед Мороз окажется выше доставшейся ему Снегурочки.

Идея. Посредники могут образовывать цепочку: $A < P_1 < P_2 < \dots < P_n < B$. Посредники могут получаться преобразованиями друг из друга или из A и B .

3. Выпуклый многоугольник лежит внутри другого выпуклого многоугольника. Докажите, что периметр внутреннего – меньше.

Транснеравенство

4. а) Пусть $a \leq b, x \leq y$. Докажите, что $ay + bx \leq ax + by$.

б) Пусть $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n, y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n$. Докажите неравенство

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n \geq x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n \geq x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \dots + x_n y_1$$

Метод Штурма

5. а) Заменим в произведении $100 \cdot 101 \cdot 102 \cdot \dots \cdot 200$ все числа на 150. Увеличится или уменьшится произведение? Тот же вопрос для суммы.

б) Увеличится или уменьшится сумма $\frac{1}{100} + \frac{1}{101} + \dots + \frac{1}{199} + \frac{1}{200}$, если все слагаемые в ней заменить на $\frac{1}{150}$?

Идея. В сумме посредники могут подбираться для отдельных слагаемых или групп слагаемых.

6. Докажите, что среди всех 100-угольников, вписанных в данную окружность, наибольшая площадь – у правильного.

7. Докажите неравенство между средним геометрическим и средним гармоническим.

8. Для всех многоугольников, которые можно накрыть данным кругом, найти такой, у которого отношение площади к числу сторон – максимально.

Неравенство Мюрхеда

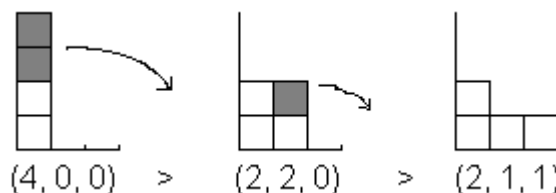
Обозначения. Пусть k, l, m – целые, $k \geq l \geq m \geq 0$. Обозначим

$T_{kl}(x, y) = x^k y^l + x^l y^k$, $T_{klm}(x, y, z) = x^k y^l z^m + x^k y^m z^l + x^l y^k z^m + x^l y^m z^k + x^m y^k z^l + x^m y^l z^k$. Ясно, что многочлены T – симметрические. Аналогично определяются симметрические многочлены T от большего числа переменных.

Ясно, что всякий симметрический многочлен представляется в виде суммы T -многочленов с подходящими коэффициентами. Например, $x + y + z = 0,5 T_{100} + x y z = \frac{1}{6} T_{111}$.

Определение. Скажем, что набор (k, l, m) *мажорирует* набор (k', l', m') , если $k \geq k', k + l \geq k' + l', k + l + m = k' + l' + m'$. Аналогичное определение выписывается и для более длинных наборов, равенство – только для последних сумм.

Наглядно это представляют так: наборы изображают в виде диаграмм (*диаграмм Юнга*), сложенных из квадратных кирпичей, ширина столбцов 1, высота – числа набора (см три диаграммы на рис). Первый набор мажорирует



второй, если второй можно получить из первого, перекладывая кирпичи вправо вниз (на рис. из (4,0,0) получаем (2,2,0), а из него (2, 1, 1).)

Упр 9. Придумайте два набора с равными суммами, которые друг друга не мажорируют.

Теорема 10 (Неравенство Мюрхеда). $T_{klm}(x, y, z) \geq T_{k'l'm'}(x, y, z)$ при всех неотрицательных значениях $x, y, z \Leftrightarrow (k, l, m)$ мажорирует набор (k', l', m') .

Упр 11. Докажите неравенство $a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2bc + b^2ac + c^2ab$ без ссылки на теорему 9.

Упр 12. Докажите неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим с помощью неравенства Мюрхеда.

13. Докажите, что для неотрицательных a, b, c выполнено неравенство

$$(ab+ac+bc)^3 \geq 27a^2b^2c^2$$

На дом

ПН1. Пусть сумма двух положительных чисел a и b фиксирована. Как изменяются следующие выражения при «сближении» a и b ?

а) ab б) $a^2 + b^2$ в) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ г) $a^4 + b^4$ д) $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ е) $a^n + b^n$ ж) $\frac{1}{a^n} + \frac{1}{b^n}$.

ПН2. 100 плохишей получили каждый по бочке варенья и корзине печенья. У каждого вес варенья отличается от веса печенья (в ту или другую сторону) не более чем на 5 кг.

Докажите, что если и бочки, и корзины пронумеровать по убыванию веса, то у емкостей с одинаковыми номерами веса содержимого будут отличаться не более, чем на 5 кг.

ПН3. Юра и Яша имеют по экземпляру одной и той же клетчатой таблицы 5×5 , заполненной 25 различными числами. Юра выбирает наибольшее число в таблице и вычеркивает строку и столбец, содержащие это число, затем выбирает наибольшее из оставшихся чисел и вычеркивает строку и столбец, содержащие это число, и т.д. Яша производит аналогичные действия, но выбирает наименьшие числа. Докажите, что сумма чисел, выбранных Яшей не больше суммы чисел, выбранных Юрой.

ПН4. Сумма нескольких положительных чисел равна 10, а сумма квадратов этих чисел больше 20. Докажите, что сумма кубов этих чисел больше 40.