# Симметрические многочлены: основная теорема

**Опр1**. Зададим на множестве строк $\boldsymbol{R}^k$ лексикографический порядок: скажем, что $\bar{a} < \bar{b}$, если первая ненулевая координата в $\bar{a} - \bar{b}$ отрицательна.

**Предл1**. Неравенства строк можно складывать и умножать на положительные числа с сохранение смысла.

**Зад2**. **а)** Пусть $\boldsymbol{N}$ – множество натуральных чисел. Докажите, что в любом непустом подмножестве $M \subset \boldsymbol{N}^k$ есть наименьшая строка.

**б)** Последовательность строк из $\boldsymbol{N}^k$ $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ такова, что $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \geq \ldots$ . Докажите, что она стабилизируется (то есть, начиная с некоторого места, все её члены равны).

**Обозначения**. Далее всюду рассматриваем многочлены и одночлены от $x, y, z$. Многочлены $\sigma_1 = x + y + z, \sigma_2 = xy + xz + yz, \sigma_3 = xyz$ назовем *элементарными симметрическими*.

**Опр2**. Скажем что одночлен $a_1 x^{k_1} y^{l_1} z^{m_1}$ *младше* одночлена $a_2 x^{k_2} y^{l_2} z^{m_2}$, если $(k_1, l_1, m_1) < (k_2, l_2, m_2)$.

**Предл3**. Старший член произведения многочленов равен произведению старших членов сомножителей.

**Опр3**. Многочлен от $x, y, z$ называется *симметрическим*, если он не меняется при перестановке любых двух переменных.

**Упр4**. Найдите старший член многочлена $\sigma_1^p \sigma_2^q \sigma_3^r$.

**Упр5**. Пусть $x^k y^l z^m$ – старший член симметрического многочлена. Что можно сказать о $k, l, m$?

**Опр4**. Пусть $k \geq l \geq m \geq 0$. Обозначим
$T_{klm} = T_{klm}(x, y, z) = x^k y^l z^m + x^k y^m z^l + x^l y^k z^m + x^l y^m z^k + x^m y^k z^l + x^m y^l z^k$

**Упр6**. **а)** Выпишите симметрические многочлены $T_{300}$, $T_{210}$, $T_{111}$.

**б)** Представьте $\sigma_1^5$ как линейную комбинацию многочленов вида $T_{klm}$.

**в)** Представьте $\sigma_1^2\sigma_2$ как линейную комбинацию многочленов вида $T_{klm}$.

**Предл7**. Всякий симметрический многочлен от $x,y,z$ единственным образом представляется в виде линейной комбинации многочленов $T_{klm}$.

**Упр8**. В каком случае старшие члены многочленов $T_{klm}$ и $\sigma_1^p \sigma_2^q \sigma_3^r$ совпадают?

**Зад9**. Докажите индукцией по степени старшего члена, что всякий симметрический многочлен

**а)** может быть представлен как многочлен от элементарных симметрических многочленов $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

**б)** Такое представление единственно.

**Опр4.** *Симметрический многочлен* от нескольких переменных – это многочлен, который не меняется при любой перестановке этих переменных. *Элементарный симметрический многочлен* степени $k$ от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – это коэффициент при $Y^{n-k}$ в многочлене $(Y + x_1)(Y + x_2)\ldots(Y + x_n)$.

**Теорема 10. а)** Всякий симметрический многочлен представляется в виде многочлена от элементарных симметрических.

**б)** Всякий симметрический многочлен от $n$ переменных представляется в виде многочлена от $s_1, s_2, \ldots, s_n$, где $s_k$ – это сумма $k$-х степеней переменных.

**Зад11.** Разложите на множители: $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$.

**Упр12.** Представьте $x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2$ в виде многочлена от $x + y + z, \quad xy + yz + xz, \quad xyz.$

**Зад13.** Решите систему уравнений $\begin{cases} x + y + z = a \\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x^3 + y^3 + z^3 = a^3 \end{cases}$

**Зад14.** Перемножаются все выражения вида $\pm\sqrt{1}\pm\sqrt{2}\pm\ldots\pm\sqrt{99}\pm\sqrt{100}$ (при всевозможных комбинациях знаков). Докажите, что результат **а**) целое число, **б**) квадрат целого числа.

**Для самостоятельного решения**

| | | |
|---|---|---|
| $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ |
| $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ |
| $c_1$ | $c_2$ | $c_3$ |

**СМ1**. В таблицу записано 9 чисел:
Известно, что 6 чисел – суммы строк и суммы столбцов таблицы равны между собой: $a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3 = c_1 + c_2 + c_3 = a_1 + b_1 + c_1 = a_2 + b_2 + c_2 = a_3 + b_3 + c_3$. Докажите, что сумма произведений строк таблицы равна сумме произведений ее столбцов: $a_1a_2a_3 + b_1b_2b_3 + c_1c_2c_3 = a_1b_1c_1 + a_2b_2c_2 + a_3b_3c_3$.

**СМ2**. Пусть $x_1, x_2,\ldots, x_n$ – комплексные корни многочлена $n$-й степени с действительными коэффициентами, $P$ – симметрический многочлен от n переменных. Докажите, что при подстановке $x_1, x_2,\ldots, x_n$ в многочлен $P$ получится действительное число.

**СМ3.** Пять целых чисел $a, b, c, d, e$ таковы, что $a+b+c+d+e$ и $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2$ делятся на нечетное число $n$. Доказать, что число $a^5+b^5+c^5+d^5+e^5-5abcde$ также делится на $n$.

**СМ4.** Пусть $x_1, x_2,\ldots, x_n$ и $y_1, y_2,\ldots, y_m$– комплексные корни двух многочленов $n$-й и $m$-й степеней соответственно с рациональными коэффициентами. Рассмотрим произведение всевозможных скобок вида $(Z–x_i–y_j)$ по всевозможным парам $i$ и $j$. Докажите, что получится многочлен от $Z$ с рациональными коэффициентами.