Поля и числа

Зад 1. Можно ли разрезать квадрат на равные прямоугольные треугольники с углом 30°?

Упр 2. Докажите, что сумма, разность, произведение и частное чисел вида $a+b\sqrt{3}$, (где a, b – рациональны) – число того же вида.

Упр 3. Докажите, что если число представляется в виде $a+b\sqrt{3}$, где a, b – рациональны, то оно представляется единственным образом.

Зад4. Являются ли числовыми полями множества выражений вида а) $m+n\sqrt{6}$, б) $a+b\sqrt{2}$, в) $a+bi$ г) $a+b\sqrt{6}$, д) $a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}$, е) $a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{6}$ (где $a,b,c,d\in\boldsymbol{Q}$, $m,n\in\boldsymbol{Z}$)?

Определения. Если K и L – (числовые) поля, и $K\subset L$, то K называют *подполем* в L, а L – *расширением* K.

Упр 5. Существует ли набор а) из пяти б) из бесконечного количества числовых полей, в котором для любых двух полей одно является расширением другого?

Зад6. а) Найдите многочлены f и g такие, что
$f\cdot(x+2)+g\cdot(x^3-2)=\text{НОД}(x+2,\ x^3-2)$.

б) Домножьте $2+\sqrt[3]{2}$ на выражение вида $a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}$ с целыми a, b, c так, чтобы произведение было целым.

в) Избавьтесь от иррациональности в знаменателе $\dfrac{1}{2-2\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}}$.

Зад7. Докажите, что множества выражений вида **а)** $a+b\sqrt[3]{5}+c\sqrt[3]{25}$ **б)** $a+b\chi+c\chi^2+d\chi^3$ (где $a,b,c,d\in\boldsymbol{Q}$, χ – корень неприводимого многочлена 4-й степени из $\boldsymbol{Q}[x]$) образуют числовые поля.

Для самостоятельного решения

ЧП1. Можно ли ненулевые комплексные числа разбить на положительные и отрицательные так, чтобы произведение чисел разного знака было отрицательным, и одинакового – положительным?

ЧП2. Существует ли такое числовое поле $L\subset\boldsymbol{C}$, что многочлен x^3+27 раскладывается в $L[x]$ на линейные множители?

ЧП3. Проверьте, что множество M комплексных чисел вида $m+ni$, где m и n – целые, замкнуто по сложению, вычитанию и умножению. Назовем такое число простым, если его нельзя разложить в M в произведение двух меньших по модулю чисел. Верно ли, что всякое число единственным образом представляется в виде произведения простых множителей?

ЧП4. Квадрат разрезан на прямоугольные треугольники с катетами 1 и 2. Доказать, что число треугольников – четно.