Многочлены деления круга

Упр1. Из центра правильного n-угольника проведены векторы ко всем его вершинам. Чему равна сумма векторов?

Зад2. Пусть ε – корень n-й степени из 1. Докажите, что

$$1+\varepsilon+\varepsilon^2+\ldots+\varepsilon^{n-1}=\begin{cases}0 & \text{если} \quad \varepsilon\neq 1\\ n & \text{если} \quad \varepsilon=1\end{cases}.$$

Определение 1. $F_p(x)=x^{p-1}+x^{p-2}+\ldots+x+1$

Упр3. Докажите, что при простом p многочлен $F_p(x+1)$ неприводим в $\mathbf{Z}[x]$.

Теорема 4. При простом p многочлен $F_p(x)$ неприводим в $\mathbf{Z}[x]$.

Определение 2. Пусть ε – корень n-й степени из 1, и не является корнем никакой меньшей степени. Тогда ε – *примитивный* корень n-й степени.

Зад 5. Примитивный корень из 1 простой степени p не является корнем никакого многочлена с рациональными коэффициентами степени меньше чем p–1.

Зад 6. Из центра правильного p-угольника (где p – простое) к его вершинам проведены $k<p$ векторов. Докажите, что
а) их сумма не равна 0;
б) любая их нетривиальная линейная комбинация с рациональными коэффициентами не равна 0.

Упр 7. В поле ***C*** есть ровно $\varphi(n)$ примитивных корней n-й степени из 1 (где $\varphi(n)$ – *функция Эйлера*, то есть количество взаимно простых с n среди 1, 2, ..., n–1)

Определение 3. *Многочлен деления круга* – это $\Phi_n(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_k)$, где $x_1,x_2,\ldots x_k$ – все примитивные корни n-й степени из 1.

Упр 8. Вычислите $\Phi_n(x)$ для всех $n<6$.

Теорема 9. $x^n-1=\Phi_a(x)\Phi_b(x)\ldots\Phi_c(x)$, где a, b, ..., c – всевозможные делители n.

Упр 10. Докажите, что различные многочлены деления круга взаимно просты.

Упр 11. Если p – простое, то $\Phi_p(x)=x^{p-1}+x^{p-2}+\ldots+x+1$.

Задача 12. Найдите $\Phi_n(x)$ для всех $n<15$**.**

Задача 13. Докажите, что коэффициенты $\Phi_n(x)$ симметрично относительно середины.

Теорема 14. Все коэффициенты $\Phi_n(x)$ – целые.

Упр 15. Какие из многочленов $\Phi_n(x)$ при $n<15$ неприводимы в **Z**[x]?

Для самостоятельного решения

ДК1. В единичную окружность вписан правильный n–угольник. Найдите произведение длин сторон всех его диагоналей.

ДК2. При каких m и n многочлен $1+x^m+x^{2m}+\ldots x^{(n-1)m}$ делится на многочлен $1+x+\ldots+x^{n-1}$?

ДК3. Рассматриваются многочлены с целыми коэффициентами.
а) $P(x)$ – неприводимый многочлен. Докажите, что найдется такой многочлен $Q(x)$, что $P(Q(x))$ – приводим.
б) $P(x)=x^n-1$. Доказать что найдется такой многочлен $Q(x)$, что $P(Q(x))$ раскладывается в произведение множителей степени меньше степени $Q(x)$ (*Указание.* Среди отношений $\varphi(n!)/n!$ встречаются сколь угодно малые.)