Комплексные числа и корни

Определения. Рассмотрим плоскость с перпендикулярными базисными векторами, которые обозначим 1 и i. *Комплексное число* представляется вектором в этой системе координат: $z = a + b \cdot i$, где a – *вещественная часть* числа z, b – *мнимая часть*. На комплексных числах задано сложение (вектора на плоскости можно покоординатно складывать) и умножение (здесь действует правило: $i^2 = -1$).

Упр 1. Пусть $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$ – комплексные числа. Найдите $\dfrac{z_1}{z_2}$.

Следствие. Множество ***C*** комплексных чисел – *поле*, то есть, замкнуто относительно четырёх арифметических действий.

Определение. Комплексное число $\bar{z} = a - bi$ называется *комплексно сопряженным* к числу $\bar{z} = a + bi$.

Упр 2. Докажите, что а) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$; б) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.

Определение. *Модулем* комплексного числа $z = a + b \cdot i$ называется действительное число $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Упр 3. Докажите, что $|z|^2 = z\bar{z}$.

Определение. Для ненулевого комплексного числа z *аргумент* $\arg z = \alpha$ равен углу поворота от положительной полуоси $O1$ в сторону положительной мнимой полуоси Oi до направления числа z.

Упр 4. Докажите, что $z = |z| \cdot (\cos\alpha + i \cdot \sin\alpha)$.

Обозначение. $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i \cdot \sin\alpha$

Упр 5. Докажите, что при перемножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы – складываются (то есть, $|z|e^{i\alpha} \cdot |w|e^{i\beta} = |z||w|e^{i(\alpha+\beta)}$)

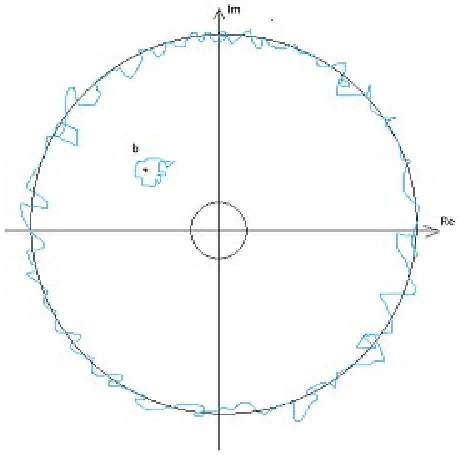
Упр 6. (Формула Муавра) Докажите, что $\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha) = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^n$ при любом натуральном *n.*

Упр 7. а) Опишите множество точек, удовлетворяющих уравнению $z^n = 1$. **б)** Докажите, что множество точек единичной окружности с центром в O замкнуто относительно умножения.

Задача 8. Докажите, что для комплексного числа ω с модулем 1 преобразование комплексной плоскости, задаваемое формулой $f(z) = \omega \cdot z$, является поворотом на угол $\alpha = \arg\omega$.

Теорема 9. (Основная теорема алгебры) Всякий непостоянный многочлен из $\boldsymbol{C}[x]$ имеет комплексный корень.

Схема доказательства «Дама с собачкой»



Назовем многочлен z^n *дамой*, а многочлен $z^n+az^{n-1}+\ldots+b$ – *собачкой* ($b\neq 0$). Пусть z обходит один раз вокруг O по кругу радиуса R.

a) Дама обойдет n раз вокруг O по кругу радиуса R^n.

b) Если R велико, то собачка будет близко от дамы, и тоже обойдет вокруг n раз вокруг O.

c) Если R мало, то собачка будет вблизи b, и вокруг O не обойдет.

d) Если менять R непрерывно, то траектория собачки тоже меняется непрерывно.

e) Число обходов вокруг O меняется только в моменты, когда траектория собачки проходит через O.

Следствие 10. а) Всякий многочлен n-й степени $P(x)\in\boldsymbol{C}[x]$ представим в виде $P(x)=a(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$, где $a,x_1,\ldots,x_n\in\boldsymbol{C}$.
б) Такое представление единственно (с точностью до перестановки сомножителей).

Лемма 11. Пусть z – комплексный корень алгебраического уравнения с действительными коэффициентами. Тогда $\bar{z}$ – тоже корень этого уравнения.

Следствие 12. В $\boldsymbol{R}[x]$ всякий многочлен степени выше 2 приводим.

Теорема 13. а) В $\boldsymbol{R}[x]$ всякий многочлен может быть разложен в произведение многочленов первой и второй степени.
б) Такое разложение единственно (с точностью до перестановки сомножителей).

Для самостоятельного решения

КЧ1. Разложите многочлен x^4-60x^2+100 на неприводимые **а)** в $\boldsymbol{R}[x]$ **б)** в $\boldsymbol{C}[x]$. **в)** Докажите, что он неприводим в $\boldsymbol{Q}[x]$.

КЧ2. Докажите, что многочлен 3-й степени приводим в $\boldsymbol{Q}[x]$ $\Leftrightarrow$ он имеет рациональный корень.

КЧ3. Многочлен $f(x)\in\boldsymbol{Q}[x]$, и имеет 4 различных комплексных корня. Известно, что есть два корня, у которых сумма и сумма квадратов рациональны. Докажите, что многочлен приводим в $\boldsymbol{Q}[x]$.

КЧ4. Два многочлена из $\boldsymbol{Q}[x]$ имеют общий комплексный корень. Докажите, что они не взаимно просты в $\boldsymbol{Q}[x]$.