Многочлены: целые значения и коэффициенты

Обозначение. $\mathbf{Z}[x]$ – множество многочленов с целыми коэффициентами, $\mathbf{R}[x]$ – с действительными, $\mathbf{Q}[x]$ – с рациональными.

Упр 1. Пусть $P(x)$ – многочлен с целыми коэффициентами (короче, $P(x)\in \mathbf{Z}[x]$).

а) Докажите, что если a и b – числа одинаковой четности, то $P(a)$ и $P(b)$ – тоже одинаковой четности.

б) Докажите, что если a и b – целые числа, причем $P(a) = 0$ и $P(b) = 1$, то или $a = b + 1$, или $b = a + 1$.

Лемма 2. Если $P(x)\in \mathbf{Z}[x]$, а m и n – целые числа, то $P(m)–P(n)$ делится на $m–n$.

Упр 3. Существует ли многочлен $P(x)\in \mathbf{Z}[x]$, такой, что $P(1)=20$, $P(20)=10$?

Упр 4. Для некоторого многочлена $P(x)\in \mathbf{Z}[x]$ числа $P(0)$ и $P(1)$ четные. Докажите, что для любого целого числа n значение $P(n)$ – четное число.

Зад 5. а) $P(x)=x^2+x+41$. Приведите пример такого натурального n, что $P(n)$ – не простое.

б) Существует ли такой непостоянный многочлен с целыми коэффициентами, у которого все значения в натуральных точках – простые числа?

Теорема 6. Всякий целый корень приведенного многочлена $x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ с целыми коэффициентами является делителем свободного члена a_n.

Упр 7. Решите уравнения: **а)** $x^3+x^2+x+6=0$, **б)** $x^3-6x^2+15x-14=0$.

Теорема 8. а) Пусть несократимая дробь $\frac{t}{n}$ – корень многочлена $P(x)=a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\ldots+a_0\in \mathbf{Z}[x]$ (a_m и a_0 не равны 0). Тогда $a_m \vdots n$, $a_0 \vdots t$

б) Пусть в пункте (а) старший коэффициент $a_m=1$. Тогда все рациональные корни многочлена $P(x)$ – целые числа.

Упр 9. Найдите все рациональные корни многочленов

а) x^3+2x^2+2x+1; **б)** $2x^3–3x^2–4x+6$

Зад 10. Разложите многочлены из упр 9 в произведение возможно большего числа непостоянных многочленов **а)** в $\mathbf{Z}[x]$ **б)** в $\mathbf{R}[x]$.

Разложение многочленов на множители. (Не)критерий Эйзенштейна

*Ниже **K** равно **Z**, **Z**$_p$, **Q** или **R**.*

Опр. Многочлен *приводим* в $\boldsymbol{K}[x]$, если его можно разложить в произведение двух многочленов меньшей степени из $\boldsymbol{K}[x]$, иначе он *неприводим*.

Упр.11 Приводимы ли $\mathbf{Z}[x]$ **а)** x^4+4; **б)** $x^2–2$; **в)** x^3+30?

Упр.12 Докажите, что всякий многочлен из $\boldsymbol{K}[x]$ можно разложить в произведение неприводимых.

Упр.13 Пусть f приводим в $\mathbf{Z}[x]$ и его старший коэффициент не кратен простому p. f_p получается из f заменой всех коэффициентов на их остатки mod p. Докажите, что f_p приводим в $\mathbf{Z}_p[x]$.

Теорема 14 (*критерий Эйзенштейна*). $f\in \mathbf{Z}[x]$, все его коэффициенты, кроме старшего, кратны p, а свободный член не кратен p^2. Тогда f неприводим в $\mathbf{Z}[x]$.

Упр.15. Почему признак из теоремы 14 не является критерием?

Домашнее задание

ЦК1. Многочлен $f(x) \in \boldsymbol{Z}[x]$, и $f(\sqrt{2})=0$. Докажите, что $f(x)$ делится на x^2-2.

ЦК2. Докажите, что если $P(x) \in \mathbf{Z}[x]$ и $|P(3)| = |P(7)| = 1$, то у $P(x)$ нет целых корней.

ЦК3. Вася пишет на доске квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ с натуральными коэффициентами a, b, c. После этого Петя, если хочет, может заменить один или два знака “+” на “–”. Если у получившегося уравнения оба корня целые, то выигрывает Вася, если же корней нет или хотя бы один из них нецелый – Петя. Может ли Вася подобрать коэффициенты уравнения так, чтобы наверняка выиграть у Пети?

ЦК4. На графике многочлена с целыми коэффициентами отмечены две точки с целыми координатами. Докажите, что если расстояние между ними – целое число, то соединяющий их отрезок параллелен оси абсцисс.

ЦК5. В неравенстве $x^2+px+q>0$ коэффициенты p и q – целые. Неравенство выполнено при всех целых x. Докажите, что оно выполнено при всех действительных x.