Делимость и остатки

Лемма 1. Пусть a – целое, b – натуральное число. Тогда a можно единственным образом представить в виде $a=kb+r$, где k и r – целые, $0\le r<b$.

Определение 1. Число k в лемме 1 называется *(неполным) частным*, а число r – *остатком* при делении a на b с остатком. Если остаток равен 0, то *a делится на b* (без остатка) (записывается $a \vdots b$).

Упр2. Разность двух чисел делится на $b \Leftrightarrow$ числа дают одинаковые остатки при делении на b.

Определение. В этом случае будем говорить, что числа *равны по модулю b* и писать $m \equiv n(\bmod b)$ или $m \equiv_b n$.

Зад3. Докажите, что остаток от деления простого числа на 30 – простое число или 1.

Теорема 4 *(действия с остатками)*. Пусть число a_1 дает при делении на b остаток r_1, число a_2 – остаток r_2. Тогда

а) *(сложение остатков)* Число a_1+a_2 при делении на b дает тот же остаток, что и число r_1+r_2.

б) *(вычитание остатков)* Число $a_1–a_2$ при делении на b дает тот же остаток, что и число $r_1–r_2$.

в) *(умножение остатков)* Число a_1a_2 при делении на b дает тот же остаток, что и число r_1r_2.

Зад5. Докажите, что натуральное число сравнимо

а) со своей суммой цифр по модулю 9;

б) со своей знакочередующейся суммой цифр по модулю 11. (В знакочередующейся сумме знаки плюс и минус чередуют с конца так, чтобы перед последней цифрой всегда стоял плюс)

Зад6. Числа x и y натуральны. Докажите, что

а) $x^3 \equiv_{10} y^3 \quad \Leftrightarrow x \equiv_{10} y$

б) $x^2 + xy + y^2 \vdots 10 \Rightarrow x^2 + xy + y^2 \vdots 100$.

Теорема 7 *(правило сокращения)*.

Пусть m и b – взаимно просты. Тогда $ma_1 \equiv_b ma_2 \Leftrightarrow a_1 \equiv_b a_2$.

Зад 8. Пусть m не делится на простое число p. Докажите, что

а). Числа m, $2m$, $3m$, …, $(p–1)m$ дают различные остатки по модулю p.

б) Числа $(p–1)!$ и $m^{p–1}(p–1)!$ дают одинаковые остатки при делении на p.

в) *(Малая теорема Ферма)* $\left(m^{p-1} - 1\right) \vdots p$.

9. а) Докажите, что если m не делится на простое число p, то среди чисел 1, 2, …, p–1 есть ровно одно такое число n, что $mn\equiv_p 1$.

б) Докажите, что для простого числа $p>2$ среди чисел 1, 2, …, p–1 есть ровно два таких, чей квадрат сравним с 1 по модулю p.

в) (Теорема Вильсона) Докажите, что $((p–1)!+1) \vdots p \Leftrightarrow p$ – простое число или $p=1$.

Китайская теорема об остатках

Упр. 10. Натуральное число при делении на 25 дает в остатке 24, а при делении на 4 дает в остатке 3.

а) Найдите наименьшее такое число.

б) Найдите все такие числа меньшие 1000.

в) Найдите общую формулу для таких чисел.

Лемма 11. Числа a и b взаимно просты.

а) Оказалось, что при делении на a чисел m и n остатки совпали, совпали и остатки от деления чисел m и n на b. Докажите, что $m–n$ кратно ab.

б) Докажите, что при делении чисел от 1 до ab на a и на b получаются все возможные пары остатков.

Теорема 12. Для взаимно простых чисел a и b и любой пары неотрицательных остатков $m<a$ и $n<b$ среди чисел от 1 до ab найдется ровно одно число c такое, что при делении на a с даёт в остатке m, а при делении на b даёт в остатке n.

Зад.13. а) Решите в целых числах уравнение $10x+8=11y+10$

б) Найдите все числа, дающие при делении на 10 остаток 8, а при делении на 11 остаток 10.

в) Найдите все числа, дающие при делении на 8 остаток 2, а при делении на 13 остаток 11.

Зад.14. Найдите все числа, которое при делении на 3 дают остаток 1, при делении на 4 – остаток 2 и при делении на 11 – остаток 3.

15. Китайская теорема об остатках. Пусть числа $m_1, m_2, \dots, m_n$ попарно взаимно просты. Тогда для любых натуральных $a_1, a_2, \dots, a_n$ найдется натуральное число x, такое что $x \equiv_{m_i} a_i$ для всех i. Более того, x определен однозначно с точностью до прибавления кратного $M = m_1 m_2 \dots m_n$.

Упр.16. Существует ли такое n кратное 4, что $n+1$ кратно 9, а $n+2$ кратно 25?

Зад.17. Докажите, что для любых попарно взаимно простых чисел $m_1, m_2, \dots, m_n$ и остатков $r_1, r_2, \dots, r_n$ по модулям $m_1, m_2, \dots, m_n$ найдутся n последовательных чисел $a, a+1, \dots, a+n-1$ таких, что $a \equiv r_1 \pmod{m_1}$, $a+1 \equiv r_2 \pmod{m_2}$, …, $a+n-1 \equiv r_n \pmod{m_n}$.

Для самостоятельного решения

ДО1. Получив натуральное число N, Максим разделил его на 101 и получил в остатке $m>0$. Затем Максим разделил N на m и получил в остатке p. Найдите наибольшее значение p и наименьшее N при котором это значение достигается.

ДО2. Существует ли в сутках момент, когда расположенные на общей оси часовая, минутная и секундная стрелки правильно идущих часов образуют попарно углы в 120°?

ДО3. Назовем число хорошим, если оно делится на квадрат натурального числа >1. При каких N найдется N последовательных хороших чисел? (Пример для $N=3$: 48, 49, 50).

ДО4. Числа a, b, c – целые. Докажите, что уравнение $ax+by=c$ имеет решение в целых числах $\Leftrightarrow$ $c \,\vdots\, \text{НОД}(a,b)$.

ДО5. Докажите, что $\dfrac{\text{НОД}(a,b)\cdot\text{НОД}(b,c)\cdot\text{НОД}(a,c)}{\text{НОД}(a,b,c)^2} = \dfrac{\text{НОК}(a,b)\cdot\text{НОК}(b,c)\cdot\text{НОК}(a,c)}{\text{НОК}(a,b,c)^2}$.

ДО6. Числа a и b взаимно просты. Докажите, что любую правильную дробь со знаменателем ab можно получить как алгебраическую сумму двух правильных дробей со знаменателями a и b (иначе говоря, для любого натурального $k<ab$ найдутся такие целые неотрицательные $m<a$ и $n<b$, что $\dfrac{k}{ab} = \pm\dfrac{m}{a} \pm \dfrac{n}{b}$