

Соответствие и исключение

1. У скольких уравнений вида $x^2+ax+b=0$ оба коэффициента – натуральны и двузначны, а корень всего один?
2. а) Сколько решений имеет уравнение $x+y+z=20$ в натуральных чётных числах?
б) Сколько решений имеет уравнение $x+y+z=17$ в натуральных нечётных числах?
в) Сколько решений имеет уравнение $x+y+z=4$ в целых числах ≥ -1 ?

Определение. Порядком множества называется число его элементов.

3. а) Во множестве порядка 99 каких подмножеств больше: чётного или из нечётного порядка?
б) Тот же вопрос для множества порядка 100?
4. Сколько есть наборов из двух или более последовательных двузначных чисел?
5. Сколькими способами можно расставить числа $1, 2, \dots, 20$ в строку так, чтобы каждое число, кроме единицы, было больше по крайней мере одного из своих соседей?
6. Клетчатый квадрат 20×20 надо разрезать на две равные части по ломаной, составленной из диагоналей 20 клеток. Сколькими способами можно это сделать? (способы, отличающиеся поворотом или отражением, считаются различными)
7. Сколькими способами можно ориентировать полный граф так, чтобы для любой пары вершин из одной из них в другую пройти по стрелкам было можно, а обратно вернуться – нельзя?

Формула включения и исключения. Пусть M – конечное множество свойств. Рассматривается конечный набор объектов, каждый из них удовлетворяет одному или нескольким свойствам.

Для любого подмножества $A \subseteq M$ обозначим n_A число объектов, обладающих каждым свойством

из A . Тогда общее число объектов равно $\sum_{A \subseteq M} (-1)^{|A|+1} n_A$ (здесь $|A|$ обозначает число элементов в

A).

8. Сколько натуральных чисел меньших 105 взаимно просты со 105?
9. Сколькими различными способами можно расставить n томов n -циклопедии на несколько полок так, чтобы на каждой полке был хотя бы один том? Всего есть а) 3 полки; б) 4 полки; в) k полок.
10. Сколькими способами можно расставить числа от 1 до n на места с номерами от 1 до n так, чтобы ни одно число не равнялось номеру места?

На дом

С1. Сколько различных слагаемых останется, если раскрыть скобки и привести подобные в следующем выражении $(1+x^2+x^4+\dots+x^{200})^3 + (1+x^3+x^6+\dots+x^{300})^2 + (1+x^5+x^{10}+\dots+x^{75})^4$?

С2. Сколько существует разных способов разбить число 2014 на натуральные слагаемые, которые *приблизительно равны*? Слагаемых может быть одно или несколько. Числа называются *приблизительно равными*, если их разность не больше 1. Способы, отличающиеся только порядком слагаемых, считаются одинаковыми.

С3. Для каждого трёхзначного числа берём произведение его цифр, а затем эти произведения, вычисленные для всех трёхзначных чисел, складываем. Сколько получится? (Разумеется, если хотя бы одна из цифр числа – ноль, то и произведение равно нулю).

С4. Куб с ребром длины 20 разбит на 8000 единичных кубиков, и в каждом кубике записано число. Известно, что в каждом столбике из 20 кубиков, параллельном ребру куба, сумма чисел равна 1 (рассматриваются столбики всех трех направлений). В некотором кубике записано число 10. Через этот кубик проходит три слоя $1 \times 20 \times 20$, параллельных граням куба. Найдите сумму всех чисел вне этих слоев.

С5. Каково наибольшее количество точек пересечения диагоналей в n -угольнике?

С6. В клетчатом квадрате $n \times n$ стерли все клетки выше главной диагонали, идущей из левого верхнего в правый нижний угол. В каждую клетку оставшейся «лесенки» записывают 0 или 1, при этом, если в какой-то клетке написана единица, то и в соседних с ней по стороне слева и сверху также должна стоять единица. Сколькими способами это можно сделать?

