Счастливые билеты

Определение. Билет с шестизначным номером от 000000 до 999999 называется *счастливым*, если сумма его первых трех цифр равна сумме последних трех цифр.

Наша цель – найти количество счастливых билетов (КСБ).

Упр1. Докажите, что КСБ не более 100000.

Обозначение. a_k– количество трехзначных номеров с суммой цифр k,
b_k– количество шестизначных номеров с суммой цифр k.

Зад2. Докажите, что КСБ с суммой цифр $2k$ равно a_k^2.

Упр3. Найдите а) a_4; б) a_9.

Зад4. Докажите, что КСБ равно $a_0^2 + a_1^2 + ... + a_{27}^2$.

Зад5. Докажите, что $a_k = a_{27-k}$

Зад6. Докажите, что КСБ равно $2(a_0^2 + a_1^2 + ... + a_{13}^2)$.

Определение. Рассмотрим все тройки неотрицательных целых чисел, удовлетворяющих уравнению $x+y+z=k$. Назовем *нарушением*, если x, y или z больше 9. Назовем тройку *хорошей*, если в ней нет нарушений и *плохой* в противном случае. Аналогично определяются плохие и хорошие шестерки.

Упр7. Найдите количество плохих троек при k=10 и k=11.

Зад8. Докажите, что при $10 \le k \le 19$ количество плохих троек равно $3a_{k-10}$

Упр9. Найдите все a_k при k=0,1,2,…,12,13 и вычислите КСБ.

Зад10. Докажите, что КСБ равно количеству шестизначных номеров с суммой цифр 27.

Зад11. Докажите, что КСБ$< C_{32}^5$.

Зад12. Докажите, что при $10 \le k$ количество плохих шестерок с одним нарушением в данном месте равно C_{k-5}^5.

Зад13. Докажите, что КСБ > $C_{32}^5 - 6C_{22}^5$.

Зад14. Докажите, что при данном k количество плохих шестерок с двумя нарушениями в данных местах равно C_{k-15}^5.

Зад15. Докажите, что КСБ=$C_{32}^5 - 6C_{22}^5 + C_6^2 C_{12}^5$.

Зад16. Представьте количества $2n$-значных счастливых билетов как сумму не более чем n слагаемых.

Барнаул 2014, 27 октября. 10 класс, А.Шаповалов www.ashap.info/Uroki/Altaj/index.html