Перевод на другой язык (изоморфизм)

How much is five plus seven?

Задача, переведенная на другой язык, может оказаться гораздо легче. Не забудьте только перевести решение обратно!

1. 77 учащихся сидят по кругу. Докажите, что у кого-то соседи – одного пола.
2. **а)** На пустой шахматной доске двое играющих по очереди двигают коня. Двигать можно только влево-вниз. Кто не сможет сделать ход – проиграл. Найдите все клетки, начав с которых первый может выиграть, как бы хорошо ни играл противник.
   б) В двух коробочках лежат орехи, в каждой не более семи. Играют двое. За один ход нужно взять три ореха – два из одной коробочки, третий – из другой. Найдите все позиции, начав с которых первый может выиграть, как бы хорошо ни играл противник.
3. Сумма 5 дробей с числителем 1 и натуральными знаменателями равна сумме 6 таких дробей. Могут ли все знаменатели быть различными?

Геометрические задачи можно перевести в алгебраические, введя координаты. Но с помощью координат можно и алгебраические задачи решать на геометрическом языке!

4. $x+y=4$. Какое наибольшее значение может принимать выражение $\sqrt{1-x^2}+\sqrt{16-y^2}$?
5. По прямой в одном направлении на некоторых расстояниях (возможно, разных) друг от друга движутся 20 одинаковых шариков, а навстречу им движутся 20 других таких же шариков. Скорости всех шариков одинаковы. При столкновении любых двух шариков они разлетаются в противоположные стороны с той же скоростью, с какой двигались до столкновения. Сколько всего столкновений произойдет между шариками?

Переводят обычно на знакомый язык, где начинает работать интуиция!

6. **а)** Капитаны Боб и Иван состязаются в изготовлении и употреблении крепких напитков. Боб сделал коктейль из рома и портвейна, а Иван смешал водку с брагой. Известно, что ром крепче водки, а портвейн крепче браги. Наутро Ивану было много хуже. Он подозревает, что его смесь оказалась крепче коктейля Боба. Обоснованы ли подозрения? (Крепость – это процент алкоголя в смеси).
   б) Имеется два дома, в каждом по два подъезда. Жильцы держат кошек и собак, причём доля кошек (отношение числа кошек к общему числу кошек и собак) в первом подъезде первого дома больше, чем доля кошек в первом подъезде второго дома, а доля кошек во втором подъезде первого дома больше, чем доля кошек во втором подъезде второго дома. Обязательно ли доля кошек в первом доме больше доли кошек во втором доме?
7. Следующая игра является переводом на другой язык одной очень популярной игры. Какой? «На столе лежат 9 карточек с числами от 1 до 9. Двое играющих по очереди берут по одной карточке. Выигрывает тот, кто первым после своего хода сможет выложить три карточки с суммой 15.»
8. Летучая ладья ходит как обычная, только не может пойти на соседнее поле. Сколько есть замкнутых маршрутов летучей ладьи по всем полям доски 4×4?

Переводят для того, чтобы обойти препятствие: так, туристы, идущие вдоль берега и натолкнувшиеся на скалы, могут обойти их, временно переправившись на другой берег.

9. Даны несколько различных графиков квадратных трехчленов вида $y=x^2+ax+b$. Все их пересечения имеют целые координаты и принадлежат ровно двум графикам. Абсциссы всех точек пересечения различны. Может ли число графиков равняться **а)** четыре графика и 5 точек пересечения; **б)** семь графиков и 12 точек пересечения?
10. а) Из N прямоугольных плиток (возможно, неодинаковых) составлен прямоугольник, у которого одна сторона вдвое больше другой. Докажите, что можно разрезать каждую плитку на две части и части и разложить части каждой плитки в две разные кучки так, чтобы из всех частей каждой кучки можно было сложить квадрат.
    б) Из N прямоугольных плиток (возможно, неодинаковых) составлен прямоугольник с неравными сторонами. Верно ли, что можно так разрезать каждую плитку на две части и разложить части каждой плитки в две разные кучки, чтобы из N частей одной кучки можно было сложить квадрат, а из N частей другой кучки – прямоугольник?

Для самостоятельного решения

Я1. Положительные числа x, y и z удовлетворяют системе: $\begin{cases} x^2 + xy + \frac{1}{3}y^2 = 25, \\ \frac{1}{3}y^2 + z^2 = 9, \\ z^2 + zx + x^2 = 16 \end{cases}$. Найдите значение выражения $xy + 2yz + 3zx$.

Я2. На доске написаны в порядке возрастания два натуральных числа x и y ($x \le y$). Петя записывает на бумажке x^2 (квадрат первого числа), а затем заменяет числа на доске числами x и $y - x$, записывая их в порядке возрастания. С новыми числами на доске он снова проделывает ту же операцию, и так далее, до тех пор, пока одно из чисел на доске не станет нулем. Чему будет в этот момент равна сумма чисел на Петиной бумажке?

Я3. а) На доске выписаны числа 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, …., $\frac{1}{99}$. За одну операцию пара выбранных чисел a и b заменяется на отношение их произведения к их сумме. После нескольких операций осталось одно число. Какое?

б) Тот же вопрос для чисел 1, 2, 4, 8, …, 1024.

в) Тот же вопрос для чисел $1\cdot2$, $2\cdot3$, $3\cdot4$, …, $n(n+1)$.

Я4. За круглым столом были приготовлены 12 мест для жюри с указанием имени на каждом месте. Николай Николаевич, пришедший первым, по рассеянности сел не на свое, а на следующее по часовой стрелке место. Каждый член жюри, подходивший к столу после этого, занимал свое место или, если оно уже было занято, шел вокруг стола по часовой стрелке и садился на первое свободное место. Возникшее расположение членов жюри зависит от того, в каком порядке они подходили к столу. Сколько может возникнуть различных способов рассадки жюри?

Я5. Три бегуна стартовали одновременно и бегут каждый со своей постоянной скоростью. Вслед им выехал через некоторое время тренер на мотороллере, догнал переднего бегуна, развернулся, доехал до заднего бегуна, развернулся и еще раз догнал переднего бегуна. Таким образом, тренер трижды проезжал мимо среднего бегуна, и по 2 раза был возле остальных бегунов. Скорость мотороллера была постоянной. Известно, что в первый раз время тренера на езду от среднего бегуна до переднего равно времени от разворота возле заднего бегуна до обгона среднего. Докажите, что тренер обгонял (встречал) среднего бегуна через равные промежутки времени.

Я6. В противоположных углах шахматной доски стоят белая и черная фишки. Ходят по очереди на соседнюю по стороне клетку, начинают белые. Белые стремятся получить прямоугольный треугольник с вершинами в центре доски и центрах клеток с фишками. Могут ли чёрные им помешать?