

## Листик 0. Задачи для знакомства

1. Выписали все натуральные числа меньше миллиарда, у которых сумма цифр делится на 19. Докажите, что их сумма тоже делится на 19. +
2. Треугольник разбит высотой на 2 меньших треугольника. Сумма площадей вписанных кругов меньших треугольников равна площади вписанного круга исходного треугольника. Докажите, что исходный треугольник – прямоугольный.
3. Каждая из диагоналей выпуклого четырехугольника разбивает его на два равнобедренных треугольника. Какие значения может принимать угол между диагоналями? +
4. Имеется набор гирь, веса которых в граммах: 1, 2, 4, ..., 1024 (последовательные степени двойки) – по одной гире каждого веса. Груз разрешается взвешивать с помощью этого набора, кладя гири на обе чашки весов. Докажите, что никакой груз нельзя взвесить этими гирями более чем 144 способами.
5. Последовательность чисел  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k, \dots$  определяется условиями:  $x_1=25$ ;  $x_2=2009$ ;  $x_{n+2}=x_n - (1/x_{n+1})$  при  $n \geq 1$ . Докажите, что среди членов последовательности найдётся ноль. Найдите номер этого члена. +
6. Пусть  $a, b, c$  – длины сторон треугольника. Докажите неравенство:
$$a^3 + b^3 + 3abc > c^3. +$$
7. На графике многочлена с целыми коэффициентами отмечены две точки с целыми координатами. Докажите, что если расстояние между ними – целое число, то соединяющий их отрезок параллелен оси абсцисс. +
8. Даны 9 чисел  $a_1, a_2, \dots, a_9$ . Известно, что среди попарных сумм  $a_i + a_j$  ( $i \neq j$ ) как минимум 29 целых. Докажите, что все числа  $2a_1, 2a_2, \dots, 2a_9$  – целые. +
9. Многоугольник (не обязательно выпуклый) удалось разрезать на 20 меньших равных многоугольников, подобных исходному. Обязательно ли исходный многоугольник – параллелограмм?
10. Можно ли в таблицу  $3 \times 3$  записать 9 различных натуральных чисел так, чтобы суммы в строках были равны между собой, а произведения в столбцах – равны между собой?