

Жадный алгоритм

Жадность до добра не доводит?! Экономика должна быть экономной!

Алгоритм – это способ достижения цели через жестко определенную последовательность шагов. Когда в ответе надо предъявить алгоритм, естественно рассматривать его как составную конструкцию. Типичные примеры: выигрышная или ничейная стратегия в играх. Кроме того, алгоритмы регулярно возникают в задачах на испытания. Если цель – максимум какой-то величины, то ее часто достигают с помощью «жадного алгоритма», то есть, добиваясь максимально возможного приращения на каждом шаге.

1. На столе лежат карточки со 100 последовательными числами. Двое игроков по очереди берут по карточке пока не разберут все. Тот, у кого сумма меньше, выплачивает разность сумм противнику. Каков результат игры при наилучших действиях сторон?
2. На блюде лежат 10 кусков сыра разного веса. Сначала Вася режет каждый из кусков на два. Затем Петя и Вася разбирают эти 20 кусков, беря по очереди по одному, начинает Петя. Каждый старается получить как можно больше сыра по весу. Каков результат игры при наилучших действиях сторон?

Бывает полезно ввести вспомогательную величину для оптимизации.

3. За какое наименьшее число ходов конь может пройти из левого нижнего угла доски 100×100 в правый верхний?

Экономные действия позволяют строить примеры проще

4. На плоскости нарисован черный равносторонний треугольник. Имеется десять треугольных плиток того же размера и той же формы. Нужно положить их на плоскости так, чтобы они не перекрывались и чтобы каждая плитка покрывала хотя бы часть черного треугольника (хотя бы одну точку внутри него). Как это сделать?

Отклонение от жадности

Часто можно показать, что жадный алгоритм не достигает результата. Доказав недостижимость, подумайте, нельзя ли из этого извлечь указания, и достичь результата, следующего за жадным.

5. $ABCD$ – квадрат со стороной 8. Разрешено делать шаги длины 1, не выходя за пределы квадрата. За какое наименьшее число шагов можно пройти из A в C ?
6. В банке работают 2002 сотрудника. Все сотрудники пришли на юбилей, и их рассадили за один круглый стол. Известно, что зарплаты сидящих рядом различаются на 2 или 3 доллара. Какой наибольшей может быть разница двух зарплат сотрудников этого банка, если известно, что все зарплаты сотрудников различны?
7. а) На каждом из полей верхней и нижней горизонтали шахматной доски стоит по фишке: внизу – белые, сверху – черные. За один ход разрешается передвинуть любую фишку на соседнюю свободную клетку по вертикали или горизонтали. За какое наименьшее число ходов можно добиться того, чтобы все черные фишки стояли внизу, а белые – сверху?
б) То же для доски 9×9 .

Естественный алгоритм

Естественный алгоритм легко найти, но трудно поверить или проверить, что он срабатывает (осуществим, достигает цели, оптимален).

8. Из Москвы выходит 1001 одна авиалиния, из Дальнего — одна авиалиния, из каждого другого города — 10 авиалиний. Докажите, что из Москвы можно добраться рейсовыми самолетами в Дальний (возможно, с пересадками).
9. В ряд лежат 100 камней. За один раз разрешается сравнить два рядом лежащих камня на чашечных весах без гирь, и, если левый тяжелее правого, поменять их местами. Как расположить камни в порядке возрастания весов за минимально возможное число переключиваний?
10. а) Клетки доски 100×100 заполнены целыми числами. За одну операцию разрешается сменить знак у всех 100 чисел одной строки, столбца, диагонали или квадрата 10×10 . Докажите, что с помощью этих операций можно добиться, чтобы сумма чисел в каждой такой сотне стала неотрицательной.
б) То же, но числа действительные.
11. Петя задумал натуральное число от 2 до 100. Вася каждым ходом называет натуральное число. Если он называет текущее Петино число, то Петя говорит «Я проиграл». Иначе Петя меняет текущее число по такому правилу: если его текущее число p делится на названное Васей число v , то он меняет p на $9! + p/v$, иначе — на $1 + pv$. Может ли Вася наверняка выиграть?
12. Есть несколько квадратов общей площадью 1. Докажите, что их можно разместить без наложений в квадрате площади 2.
13. Есть n мужчин и n женщин, каждый имеет свою шкалу предпочтений для лиц противоположного пола. Допустим, мы их переженили. Назовем пару (Он, Она) *разводоопасной*, если Он Ей нравится больше мужа, а Она Ему – больше жены. Докажите, что можно всех переженить так, чтобы разводоопасных пар не возникло.

Для самостоятельного решения

ЖА1. На блюде лежат 15 кусков сыра двух весов. Сначала Вася может разрезать некоторые из этих кусков (но не все) каждый на две части так, чтобы в результате снова получились куски двух весов. Затем Петя берет себе один из кусков, потом Вася – один из оставшихся кусков, затем снова Петя и т.д. пока не разберут весь сыр. Каждый старается получить как можно больше. Каков результат игры при наилучших действиях сторон?

ЖА2. Два мага сражаются друг с другом. Вначале они оба парят над морем на высоте 100 м. Маги по очереди применяют заклинания вида “уменьшить высоту парения над морем на a м у себя и на b м у соперника”, где a, b – действительные числа, $0 < a < b$. Набор заклинаний у магов конечен и одинаков, их можно использовать в любом порядке и неоднократно. Маг выигрывает дуэль, если после чьего-либо хода его высота над морем будет положительна, а у соперника – нет. Существует ли такой набор заклинаний, что второй маг может гарантированно выиграть (как бы ни действовал первый)?

ЖА3. На первой горизонтали шахматной доски стоят 8 одинаковых черных ферзей, а на последней – 8 одинаковых белых ферзей. За какое минимальное число ходов белые ферзи могут обменяться местами с черными? Ходят белые и черные по очереди, по одному ферзю за ход.

ЖА4. а) 100 карточек в стопке пронумерованы числами от 1 до 100 сверху вниз. Двое играющих по очереди снимают сверху по одной или несколько карточек и отдают противнику. Выигрывает тот, у кого первого произведение всех чисел на карточках станет кратно 1000000. Каков будет результат игры при правильной игре сторон?

б) Тот же вопрос при $N!$ карточек, выигрывает тот, у кого первого произведение разделится на $N!$

ЕА1. В Шпионии все авиарейсы поделены между двумя компаниями так, что из каждого города выходит поровну рейсов каждой компании. Известно, что из г. Моссадква в г. Фсбург можно добраться авиарейсами, возможно, с пересадками. Агенту 007 приказано менять авиакомпанию при каждой пересадке. Докажите, что он может добраться из Моссадквы в Фсбург.

ЕА2. На плоскости как-то расположены несколько бесконечных полос, сумма их ширин равна 100. Полосы разрешено передвигать параллельно себе, но нельзя поворачивать. Докажите, что ими можно покрыть круг радиуса 1.

ЕА3. На полоске $1 \times N$ на 25 левых полях стоят 25 шашек. Шашка может ходить на соседнюю справа свободную клетку или перепрыгивать через соседнюю справа шашку на следующую за ней клетку (если эта клетка свободна), движение влево не разрешается. При каком наименьшем N все шашки можно переставить подряд без пробелов в обратном порядке?

ЕА4. Внутри прямоугольного листа бумаги вырезали n прямоугольных дыр со сторонами, параллельными краям листа. На какое наименьшее число прямоугольных частей можно гарантированно разрезать любой такой дырявый лист?