

Испытания-2: Взвешивания

Пространство вариантов

Если не оговорено противное, взвешивания проводятся на чашечных весах без гирь. Основной прием решения: суметь увидеть все возможные случаи и проводить трисекцию случаев, т.е. именно из сравнения числа случаев подбирать взвешивания.

1. Из трёх монет одна фальшивая, причём неизвестно, легче или тяжелее настоящих. Как найти её за два взвешивания и определить, легче она или тяжелее?
2. Имеются 13 гирек-эталонов массой 1 г, 2 г, ..., 13 г. К сожалению, одна из гирек побывала в руках нечестных торговцев, и теперь её вес немного отличается от правильного (но неизвестно, в какую сторону). За какое наименьшее число взвешиваний можно найти фальшивую монету?
3. Было 9 гирь массами 1 г, 2 г, ..., 9 г, причём гиря большей массы имеет больший размер. Одна из гирь потерялась. За какое наименьшее число взвешиваний можно выяснить, какая именно гиря потеряна?
4. Имеются 10 различных гирь массой 1 г, 2 г, ..., 10 г. Около каждой гири лежит этикетка, указывающая её массу, однако этикетки каких-то двух гирь, массы которых отличаются на 1 г, перепутаны. За какое наименьшее число взвешиваний можно найти эти гири?

Весы со стрелкой

В этом занятии используются «весы со стрелкой», то есть прибор с одной чашкой, позволяющий узнать точный вес груза. Обычно такие весы позволяют получить больше информации, чем двухчашечные весы. Например, если мы знаем, что все настоящие монеты весят по 10 г, а все фальшивые – по 9 г, то взвесив несколько монет, мы можем точно выяснить, *сколько* из них являлись фальшивыми.

Полезно использовать следующие идеи и приёмы:

- 1) *крайние суммы* – рассмотреть наибольшее и наименьшее возможные значения суммарной массы нескольких монет (объектов)
- 2) *алгебраизация* – массы можно искать как решения уравнений и систем уравнений
- 3) *деление на большее число групп* (в отличие от бисекции и трисекции, здесь групп столько, сколько возможных результатов может дать одно взвешивание).

5. Среди 21 монеты 10 настоящих и 11 фальшивых. Фальшивые монеты на 1 г легче настоящих. Как за одно взвешивание на двухчашечных весах со стрелкой узнать, фальшива ли конкретная монета?
6. В корзине лежат 9 яблок. Имеются весы, с помощью которых можно узнать суммарный вес любых *двух* яблок. Придумайте способ выяснить за 6 взвешиваний суммарный вес *всех* яблок.
7. На столе лежит 7 пронумерованных мешков, в каждом из которых по 10 монет. В одном из мешков находятся фальшивые монеты, а в остальных – настоящие. Настоящая весит 10 граммов, а фальшивая – 9. Как определить за одно взвешивание, в каком мешке находятся фальшивая монета?
8. Имеются 7 мешков, в некоторых из которых все монеты фальшивые, а в остальных – все монеты настоящие. Настоящая монета весит 10 г, а фальшивая – 9 г. Как определить за одно взвешивание все мешки с фальшивыми монетами?
9. Даны четыре монеты, среди которых могут оказаться фальшивые. Настоящая монета весит 10 г, а фальшивая – 9 г. За какое наименьшее количество взвешиваний можно определить все фальшивые монеты?
10. Геологи взяли в экспедицию 80 банок консервов, веса которых все известны и различны (имеется список). Через некоторое время надписи на консервах стали нечитаемыми, и только завхоз знает, где что. Он может это всем доказать (то есть обосновать, что в какой банке находится), не вскрывая консервов и пользуясь только сохранившимся списком и двухчашечными весами со стрелкой, показывающей разницу весов. Докажите, что для этой цели ему
а) достаточно четырёх взвешиваний;
б) недостаточно трёх.

Для самостоятельного решения

Ис6. Взвешивания за плату. а) У бедного мальчика Саши всего 169 монет, причем одна из них лёгкая ФМ. У жадного мальчика Кости есть весы, но за каждое взвешивание он берет с Саши плату: 1 рубль, если одна из чашек перевесила, и 2 рубля, если весы остались в равновесии. Какую наименьшую сумму должен приготовить Саша, чтобы заведомо определить ФМ с помощью Костиных весов?

б) У бедного мальчика Саши всего 300 монет, и ровно одна из них лёгкая ФМ. У жадного мальчика Кости есть весы, но за каждое взвешивание он берет с Саши плату: 2 рубля, если перевесила левая чашка, и 1 рубль при любом другом исходе. Какую наименьшую сумму должен приготовить Саша, чтобы заведомо определить ФМ с помощью Костиных весов?

Ис7. В ряд лежат 8 монет, при этом из левых четырёх одна фальшивая и из правых четырех тоже одна (обе фальшивые легче настоящих и равны по весу друг другу). За какое наименьшее число взвешиваний на чашечных весах без гирь можно наверняка определить, сколько настоящих монет лежит между парой фальшивых (сами фальшивые монеты определять не обязательно).

Ис8. Есть N карт, из которых задумана одна. Разрешается разложить карты на стопки с разным числом карт и спросить, в какой из стопок задуманная карта. При каких N можно найти задуманную карту за два таких вопроса?

Ис9. В ряд лежат 8 монет, при этом из левых четырёх одна фальшивая и из правых четырех тоже одна (обе фальшивые легче настоящих и равны по весу друг другу). За два взвешивания на двухчашечных весах без гирь найдите, сколько настоящих монет лежит между парой фальшивых (сами фальшивые монеты определять не обязательно).

Интернет-кружок 11 класса, 1543 школа. Рук. А.Шаповалов, ноябрь 2010 г. www.ashap.info/Uroki/1543/2010-11/index.html