

Правильные многогранники

Зад1. а) Все грани многогранника – треугольники, в каждой вершине сходится 5 ребер. Сколько вершин, ребер и граней у такого многогранника?

б) А сколько их у многогранника, где все грани – пятиугольники, а в каждой вершине сходятся 3 ребра?

Определение. *Правильные многогранники (платоновы тела)* – это выпуклые многогранники, у которых все грани – равные между собой правильные многоугольники, а в каждой вершине сходится одинаковое число ребер. Примеры: правильный тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр и икосаэдр.

Зад 2. а) Какое минимальное количество точек на поверхности додекаэдра надо отметить, чтобы на каждой грани была хотя бы одна отмеченная точка?

б) Тот же вопрос про икосаэдр.

Пред 3. а) В правильном многограннике все ребра равны и все двугранные углы при рёбрах равны.

б) У каждого правильного многогранника есть вписанная и описанная сферы.

Определение. Центры граней правильного многогранника очевидно являются вершинами другого правильного многогранника. Он называется *двойственным* к исходному.

Упр 4 а) Для каждого многогранника из списка выше укажите двойственный.

б) Докажите, что количество вершин (граней) двойственного многогранника равно числу граней (вершин) исходного, а числа ребер у них совпадают.

Зад 5 а) Найдите объем октаэдра с ребром l .

б) Такой же вопрос про додекаэдр.

Теорема 6. Все платоновы тела исчерпываются перечисленными в списке.

Зад 7. Икосаэдр и додекаэдр вписаны в одну и ту же сферу. Докажите, что тогда они описаны вокруг одной и той же сферы.

Для самостоятельного решения

ПМ1. Для какого наибольшего n можно выбрать на поверхности куба n точек так, чтобы не все они лежали на одной грани куба и при этом были вершинами правильного (плоского) n -угольника?

ПМ2. Можно ли вписать октаэдр в куб так, чтобы вершины октаэдра находились на ребрах куба?

ПМ3. Около правильного тетраэдра $ABCD$ описана сфера. На его гранях как на основаниях построены во внешнюю сторону правильные пирамиды $ABCD'$, $ABDC'$, $ACDB'$, $BCDA'$, вершины которых лежат на этой сфере. Найдите угол между плоскостями ABC' и ACD' .