

Фазовое пространство

1. а) Какое наименьшее число королей можно расставить на клетчатой доске 9×10 так, чтобы они побиили все свободные поля?

б) Петя задумал двузначное число. За одну попытку Вася называет двузначное число. Если каждая из цифр васиногo числа отличается не более чем на 1 от стоящей на том же месте цифры Петинoгo числа, то Вася выиграл. За какое наименьшее число попыток Вася может гарантированно выиграть?

2. Петя задумал пару чисел (x, y) , каждое от 0 до 1. За одну попытку Вася называет свою пару чисел (u, v) . Если $|u-x|$ и $|v-y|$ оба меньше $0,13$, то Вася выиграл. За какое наименьшее число попыток Вася может гарантированно выиграть?

3. а) Докажите, что для любого a уравнение $\operatorname{arctg}(x+a) = \operatorname{arctg}(x) - \pi/2$ имеет решение.

б) Докажите, что для любого b уравнение $\sin(x+b) = \cos^7 x$ имеет бесконечно много решений.

4. Монах выходит из своей обители в 12 дня и идет в гору по прямой дороге, достигая вершины в 12 ночи. После ночной стоянки на следующий день он выходит в 12 дня и возвращается в монастырь в 6 вечера. Докажите, что найдется точка пути, в которой монах побывал в одно и то же время в течение обоих маршрутов.

5. Два дуэлянта договорились встретиться в Гайд-парке между 5.00 и 6.00. Каждый из них приходит на место встречи случайным образом, ждет 15 минут, и если встреча не произошла, то в гневе уходит. Какова вероятность того, что дуэль все-таки состоится?

6. Из города A в город B идут две непересекающиеся дороги. Известно, что две машины, едущие по разным дорогам из A в B и связанные веревкой длины 20 метров, смогли проехать, не порвав веревки. Могут ли разминуться, не коснувшись, два круглых воза радиуса 10 метров, центры которых движутся по этим дорогам навстречу друг другу?

7. а) На планете X море занимает менее половины поверхности. Докажите, что на X найдутся две диаметрально противоположные точки суши.

б) На окружности закрашены несколько отрезков, в сумме менее четверти ее длины. Докажите, что в окружность можно вписать квадрат так, чтобы все вершины были не окрашены.

Для самостоятельного решения

Фп1 Двое играющих по очереди передвигают каждый свою фишку на клетчатой доске 100×100 , каждым ходом – на соседнее по стороне поле. Первый выигрывает, если после его хода станут перпендикулярными отрезки, соединяющие центры занятых фишками клеток с центром доски. Докажите, что если вначале фишки стояли в противоположных углах доски, то первый может выиграть независимо от игры второго.

Фп2 На плоскости нарисована фигура площади больше 2. Докажите, что в ней найдутся две такие точки A и B , что обе координаты вектора AB – целые.

Фп3 В Москве 7 высоток. Турист-математик хочет найти такую точку, из которой все эти высотки видны в заданном порядке (начиная с МГУ, по часовой стрелке). Всегда ли ему удастся это сделать?

Определение. Прямая на сфере — это пересечение сферы и плоскости, проходящей через центр сферы. Отрезок на сфере – это дуга прямой. Полюса прямой – две наиболее удаленные от неё точки сферы.

Фп4. а) На сфере радиуса 1000 дан круг радиуса 1. Найдите гмт полюсов прямых, пересекающих круг.

б) На сфере единичного радиуса выбрано несколько отрезков суммарной длины меньше π . Докажите, что существует прямая, не пересекающая ни один из этих отрезков.

