

## Цифры $2^n$

**Теорема.** Для любой комбинации цифр найдется такое натуральное  $m$ , что  $2^m$  начинается на эту комбинацию. (Например, есть степень 2, которая начинается на 2010.)

**Определение.** Дробная часть числа  $\{x\}$  – это расстояние на числовой оси от  $x$  до ближайшего слева целого числа. (Например,  $\{5\}=0$ ,  $\{3,14\}=0,14$ ,  $\{-3,14\}=0,86$ ).

**Упр1.** Докажите, что **a)**  $0 \leq \{x\} < 1$ ; **b)**  $\{x+y\} \leq \{x\} + \{y\}$ ; **c)**  $\{x+y\} = \{x\} + \{y\}$ ; **d)**  $\{nx\} = \{n\{x\}\}$  для целого  $n$ .

**Замечание.** Из доказанного ясно, что дробные части по сложению ведут себя как «остатки по модулю 1».

**Определение.** Дробная часть  $\lg(x)$  называется *мантиссой*, а целая часть  $\lg(x)$  – *характеристикой* числа  $x$ .

**Пред2.** Десятичные записи положительных чисел  $x$  и  $y$  состоят из одних и тех же цифр в одном и том же порядке  $\Leftrightarrow \{\lg(x)\} = \{\lg(y)\}$ .

**Замечание.** Иначе говоря, мантиссой определяются цифры числа, а характеристикой – положение десятичной запятой.

**Зад 3.** На доске выписаны десятичные записи чисел  $2^n$  и  $5^n$  ( $n$  – натурально). Сколько всего цифр выписано?

**Пред4.** Пусть  $n$  – натурально и  $\{\lg(n)\} \leq \{\lg(x)\} < \{\lg(n+1)\}$ . Тогда десятичная запись числа  $x$  начинается в точности цифрами числа  $n$ .

**Зад5.** Блоха скачет по окружности длины 1 прыжками постоянной иррациональной длины  $d$ .

**a)** Докажите, что блоха не сможет вернуться в начальную точку;

**б)** Докажите, что рано или поздно блоха побывает в двух точках на расстоянии меньше 0,001.

**в)** За  $m$  прыжков блоха переместилась из точки  $A$  в точку  $B$ , а еще через  $m$  прыжков – в точку  $C$ . Расстояние от  $A$  до  $B$  равно  $g$ . Чему равно расстояние от  $B$  до  $C$ ?

**г)** На окружности есть ямка некоторой ширины. Докажите, что рано или поздно блоха попадет в ямку.

**Пред6.**  $\lg 2$  – иррациональное число.

**Пред7.** Для любого натурального  $n \neq 9 \dots 9$  найдется такое натуральное  $m$ , что  $\{\lg(n)\} \leq \{m \lg 2\} < \{\lg(n+1)\}$ .

**Зад8.** Докажите, что для любой комбинации цифр найдется бесконечно много таких натуральных  $m$ , что  $2^m$  начинается на эту комбинацию.

### Для самостоятельного решения

**Цф1.** Решите уравнение  $x=9\{x\}$ .

**Цф2.** Докажите, что  $\lg 2 + \lg 3$  – иррациональное число.

**Цф3.** Существуют ли такие иррациональные числа  $a$  и  $b$ , что  $a^b$  – рационально?

**Цф4.** Известно, что число  $2^{333}$  имеет 101 цифру и начинается с 1. Сколько чисел в ряду 2, 4, 8, 16, ...,  $2^{333}$  начинается с 4?

**Цф5.** Существуют ли такие натуральные  $n$  и  $k$ , что десятичная запись числа  $2^n$  начинается числом  $5^k$ , а десятичная запись числа  $5^n$  начинается числом  $2^k$ ?

Интернет-кружок 11 класса, 1543 школа. Рук. А.Шаповалов, сентября 2010 г. [www.ashap.info/Uroki/1543/2010-11/index.html](http://www.ashap.info/Uroki/1543/2010-11/index.html)