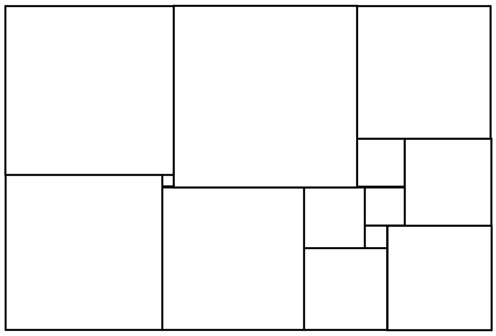
## Линейные системы. Рациональный трюк.

### Трудные задачи

**Т1.** Есть 10 бананов. За какое наименьшее число взвешиваний на чашечных весах без гирь можно убедиться, что все бананы весят одинаково?

**Т2.** Двое разбойников отобрала у купца мешок золотых слитков. Оказалось, что какой бы слиток ни отложить, оставшиеся слитки можно разделить между разбойниками так, чтобы каждый получил золота поровну (по весу). Докажите, что общее число слитков нечётно.

### Системы линейных уравнений



**Зад. 1.** На рисунке приведено разрезание прямоугольника на квадраты. Зная, что сторона наименьшего квадрата равна 3, найдите стороны остальных квадратов.

**Предл 2.** Всякая система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = c_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = c_n \end{cases}$$

равносильна системе ступенчатого вида

$$\begin{cases} b_{11}x_1 + \quad \ldots \quad + b_{1n}x_n = d_1 \\ \qquad b_{2k}x_k + \quad \ldots \quad + b_{2n}x_n = d_2 \\ \qquad\qquad b_{3l}x_l + \quad \ldots \quad + b_{3n}x_n = d_3 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \ldots \\ \qquad\qquad\qquad b_{rs}x_s + \ \ldots \ + b_{rn}x_n = d_r \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = d_{r+1} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = d_m \end{cases}$$

где $b_{11}b_{2k}b_{3l}\ldots b_{rs} \neq 0, \quad 1 < k < l < \ldots < s$ .

**Зад. 3. а)** Докажите, что у системы линейных уравнений может быть либо 0, либо 1, либо бесконечно много решений.
**б)** Докажите что у однородной (без свободных членов) линейной системы уравнений может быть либо одно, либо бесконечно много решений.

**Определение.** Пусть у линейной системы есть решение. Упростим систему равносильными преобразованиями: будем по одной исключать неизвестные, выражая их через другие в виде суммы с числовыми коэффициентами. В итоге останутся $k$ неизвестных, чьи значения можно задавать свободно, а остальные можно последовательно выразить через эти $k$ *свободных*. Число свободных неизвестных назовем *рангом* (множества) решений.

**Зад. 4.** Найдите ранг решений системы $x_1+x_2=0$, $x_2+x_3=0$, …, $x_{n-1}+x_n=0$, $x_n+x_1=0$
**а)** при нечетном n; **б)** при чётном n.

**Теорема 5**. Ранг решений системы из $k$ уравнений с $n$ неизвестными не меньше $n–k$.

**Зад. 6. а)** Докажите, что если у однородной линейной системы неизвестных на 2 больше, чем уравнений, то найдется решение, где не все переменные равны.
**б)** Решите Т1.

### Рациональный трюк

**Предл 7.** Если линейная система с целыми коэффициентами имеет какое-то решение, то она имеет решение в рациональных числах.

**Зад. 8.** У Пети было несколько яблок. Он проделал с ними несколько взвешиваний на чашечных весах без гирь, и каждый раз получал равенство. Докажите, что можно приписать каждому яблоку цену в целое число копеек так, чтобы при каждом из проведенных взвешиваний цены чаш были одинаковы.

**Зад.9. а)** Двое разбойников отобрали у купца мешок золотых монет. Каждая монета стоит целое число грошей. Оказалось, что какую бы монету ни отложить, оставшиеся можно разделить между разбойниками так, чтобы каждый получил поровну грошей. Докажите, что число монет нечетно. **б)** Решите задачу Т2.

## Домашнее задание

**ЛС1. а)** Есть $2n+1$ камней, каждый весит целое число граммов. Известно, что убрав любой из камней, можно оставшиеся разложить на две равные по количеству и весу кучки. Докажите, что все камни весят одинаково.
**б)** То же, но веса камней – рациональны.
**в)*** То же, но веса камней – действительны.
(Все веса положительны).

**ЛС2.** На отрезке $[0,1]$ отмечены концы, а также конечное число точек внутри. Известно, что любая внутренняя отмеченная точка лежит ровно посередине между какими-нибудь отмеченными точками. Докажите, что все отмеченные точки рациональны.

**ЛС3. а)** Дана схема разрезания прямоугольника на квадраты (типа схемы в зад.1). Известно, что есть хотя бы одно разрезание по такой схеме. Докажите, что для заданного значения нижней стороны такое разрезание ровно одно.
**б)** Прямоугольник можно разрезать на квадраты. Докажите, что его можно разрезать на равные квадраты.

**Указание** к **а)** Если есть много разрезаний, зависящих от параметра $t$, то длина другой стороны прямоугольника зависит от $t$ линейно, а площадь – квадратично.