Симметрические многочлены

Теория

Опр 1. Многочлен от x, y называется *симметрическим,* если он не изменяется при замене x на y, а y на x.

Опр 2. Симметрические многочлены $\sigma_1 = x + y$, $\sigma_2 = xy$ называются *элементарными* симметрическими многочленами от x и y.

Упр 1. Докажите, что если подставить в любой многочлен от σ_1 и σ_2 выражения $\sigma_1 = x + y$, $\sigma_2 = xy$, то получится симметрический многочлен от x и y.

Лемма 2. Докажите, что всякую степенную сумму $s_n = x^n + y^n$ можно представить в виде многочлена от σ_1 и σ_2.

Указание. Индукция по n: $s_n=\sigma_1 s_{n-1}-\sigma_2 s_{n-2}$.

Теорема 3 *(основная теорема о симметрических многочленах).* Любой симметрический многочлен от x и y можно единственным образом представить в виде многочлена от $\sigma_1 = x + y$, $\sigma_2 = xy$.

Опр 3. Назовем многочлен $f(x, y, z)$ от трех переменных *симметрическим*, если при любой перестановке этих переменных он остается неизменным. В частности, *элементарные симметрические многочлены* от трех переменных x, y и z – это $\sigma_1=x+y+z$, $\sigma_2=xy + xz + yz$ и $\sigma_3=xyz$. В общем случае *элементарный симметрический многочлен* σ_k степени k от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – это коэффициент при Y^{n-k} в многочлене $(Y+x_1)(Y+x_2)\ldots(Y+x_n)$.

Теорема 4 (*обобщенная теорема Виета*). Пусть у приведенного многочлена n-й степени n корней (с учетом кратности). Тогда его коэффициент при x^{n-k} равен $(-1)^k\sigma_k$ от этих корней.

Опр 4. Симметрический многочлен с наименьшим числом членов, одним из слагаемых которого является одночлен $x^k y^l z^m$, называется *орбитой* этого одночлена и обозначается через $O(x^k y^l z^m)$.

Зад 5. а) Докажите, что каждую степенную сумму $s_k = x^k + y^k + z^k$ можно представить в виде многочлена от $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

б) Докажите, что орбита любого одночлена выражается через $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

в) Докажите основную теорему о симметрических многочленах от трех переменных x, y, z.

Опр 5. Многочлен от n переменных называется симметрическим, если он не меняется при перестановке любых двух переменных.

Теорема *(основная теорема о симметрических многочленах).* Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – симметрический многочлен от n переменных. Тогда существует такой многочлен $\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$, что если подставить в него вместо $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ их выражения через $x_1, x_2, \ldots, x_n$, т.е.

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\sigma_n = x_1 x_2 \ldots x_n$$

то получится многочлен, тождественно равный $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Многочлен $\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$, обладающий таким свойством существует, и он только один.

Домашнее задание по теории

СМ1. Составьте квадратное уравнение, корнями которого являются кубы корней квадратного уравнения $x^2 + 6x + 10 = 0$.

СМ2. $a+\frac{1}{a}$ – целое число. Докажите, что $a^{10}+\frac{1}{a^{10}}$ – тоже целое число

СМ3. Решите системы уравнений

а) $\begin{cases} x^3+y^3=35 \\ x+y=5 \end{cases}$, б) $\begin{cases} x^5+y^5=33 \\ x+y=3 \end{cases}$, в) $\begin{cases} x^3+y^3=8 \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$.

СМ4. Дан график кубической параболы и две прямые, параллельные оси абсцисс, пересекающие график в трех точках каждая. Пусть абсциссы этих точек $x_1<x_2<x_3<x_4<x_5<x_6$. Докажите, что $x_2-x_1+x_6-x_5=x_4-x_3$.

СМ5. Доказать, что если x_1 и x_2 корни квадратного уравнения $x^2+px+q=0$ с целыми коэффициентами p и q, то при любом натуральном n число $x_1^n+x_2^n$ является целым.

СМ6. Выразите явно а) x^6+y^6, б) x^n+y^n через $x+y$ и xy.

СМ7. Выразите явно а) $x^3+y^3+z^3$, б) $x^6+y^6+z^6$ через элементарные симметрические многочлены.

Практика

Зад 1. Составьте квадратное уравнение, корнями которого являются кубы корней квадратного уравнения $x^2+6x+10=0$.

Зад 2. $a+\frac{1}{a}$ – целое число. Докажите, что $a^{10}+\frac{1}{a^{10}}$ – тоже целое число

Зад 3. Решить систему уравнений

а) $\begin{cases} x^3+y^3=35 \\ x+y=5 \end{cases}$, б) $\begin{cases} x^5+y^5=33 \\ x+y=3 \end{cases}$, в) $\begin{cases} x^3+y^3=8 \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$.

Зад 4. Дан график кубической параболы и две прямые, параллельные оси абсцисс, пересекающие график в трех точках каждая. Пусть абсциссы этих точек $x_1<x_2<x_3<x_4<x_5<x_6$. Докажите, что $x_2-x_1+x_6-x_5=x_4-x_3$.

Зад 5. Доказать, что если x_1 и x_2 корни квадратного уравнения $x^2+px+q=0$ с целыми коэффициентами p и q, то при любом натуральном n число $x_1^n+x_2^n$ является целым.

Зад 6. Выразите а) x^6+y^6, б) x^n+y^n через $x+y$ и xy.

Зад 7. Разложить на множители многочлен $6x^4-11x^3y-18x^2y^2-11xy^3+6y^4$.

Зад 8. Решить иррациональное уравнение $\sqrt[4]{97-x}+\sqrt[4]{x}=5$.

Опр 1. Назовем многочлен $f(z)=a_0z^n+\ldots+a_{n-1}z+a_n$, $(a_0\neq 0)$ возвратным, если в нем коэффициенты, равноудаленные от концов совпадают.

Зад 9. Докажите, что всякий возвратный многочлен четной степени $2k$ представляется в виде $f(z)=z^k h\left(z+\frac{1}{z}\right)$, где h – некоторый многочлен степени k.

Зад 10. Докажите, что каждую степенную сумму $s_k=x^k+y^k+z^k$ можно представить в виде многочлена от $x+y$, $xy+yz+xz$, xyz.

Зад 11. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x+y+z=a \\ x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x^3+y^3+z^3=a^3 \end{cases}$$

Для самостоятельного решения

Зад 12. Доказать, что число $(7+\sqrt{48})^{13}+(7-\sqrt{48})^{13}$ целое и делится на 14.

Зад 13. Существует ли многочлен $P \in R[x,y]$ такой, что он принимает все положительные значения и не принимает нулевого.

Зад 14. Числа x, y, z удовлетворяют соотношениям:

$$x+y+z=a, \quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{a}.$$

Докажите, что хотя бы одно из этих чисел равно a.

Зад 15. Разложить на множители: $x^3+y^3+z^3-3xyz$.

Зад 16. Пять целых чисел a,b,c,d,e таковы, что $a+b+c+d+e$ и $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2$ делятся на нечетное число n. Доказать, что число $a^5+b^5+c^5+d^5+e^5-5abcde$ также делится на n.

Зад 17. Числа u, v, w, x, y, z – таковы, что

$$x+y+z=u+v+w$$

$$xyz=uvw$$

$$0<u\le x\le y\le z\le w, u\le v\le w$$

Докажите, что $u=x, v=y, w=z$.

А.В.Шаповалов, апрель 2010 г. www.ashap.info/Uroki/1543/2009-10/index.html