Неприводимые многочлены. Многочлены деления круга

Задача 1. а) Из центра правильного *23*-угольника ко всем его вершинам проведено по вектору. Докажите, что сумма этих векторов равна 0.
б)** Какое наименьшее число векторов можно из провести центра правильного *23*-угольника к его вершинам так, чтобы их сумма была равна 0?
Определение 1. Многочлен ненулевой степени называется *приводимым* в *K[x]*, если он может быть разложен в произведение двух многочленов меньшей степени из *K[x]*, и *неприводимым* в противном случае.
Задача 2. Приводим ли x^4+1 **а)** в $\boldsymbol{R}[x]$ **б)** в $\boldsymbol{Q}[x]$?
Факт *(Основная теорема арифметики для многочленов)*. Пусть множество чисел F таково, что для любых двух чисел из F сумма, разность, произведение и частное (при делении не на 0) лежит в F. Тогда всякий многочлен в F[x] может быть разложен в произведение числа и неприводимых многочленов со старшим коэффициентом 1, причем такое разложение единственно с точностью до порядка сомножителей.
Задача 3. Разложите на неприводимые в $\boldsymbol{R}[x]$ многочлены а) $x^{12}-1$; б) x^5-1.
Теорема 4. *(Критерий неприводимости Эйзенштейна)* Пусть $A(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ и p – простое число. Если a_n не делится на p, a_i делится на p для всех $i<n$, но a_0 не делится на p^2, то $A(x)$ неприводим в $\boldsymbol{Z}[x]$.
Упр 5. Перемножили два квадратных трехчлена с целыми коэффициентами. Мог ли получиться многочлен вида $x^4+3ax^3+6bx^2+9cx+12$, где a, b, c целые?
Задача 6. Пусть ε – корень n-й степени из 1. Докажите, что $1+\varepsilon+\varepsilon^2+\ldots+\varepsilon^{n-1}=\begin{cases}0 & \text{если } \varepsilon\neq 1\\ n & \text{если } \varepsilon=1\end{cases}$.

Определение 2. $F_p(x)=x^{p-1}+x^{p-2}+\ldots+x+1$

Упр7. Найдите все корни многочлена $F_p(x)$.

Лемма 8. Если p – простое, то $F_p(x+1)$ неприводим в $Z[x]$.

Задача 9. Докажите, что если p – простое, то $F_p(x)=x^{p-1}+x^{p-2}+\ldots+x+1$ неприводим в $Z[x]$.

Определение 3. Пусть ε – корень n-й степени из 1, и не является корнем никакой меньшей степени. Тогда ε – *примитивный* корень n-й степени из 1.
Упр 7. В поле $\boldsymbol{C}$ есть ровно $\varphi(n)$ примитивных корней n-й степени из 1 (где $\varphi(n)$ – *функция Эйлера*, то есть количество взаимно простых с n среди чисел 1, 2, ..., n.).
Задача 10. Докажите, что **а)** если p – простое, то $\varphi(p^k)=p^k-p^{k-1}$
б) если m и n взаимно просты, то $\varphi(mn)=\varphi(m)\,\varphi(n)$.
Задача 11 а). Примитивный корень из 1 простой степени p не является корнем никакого многочлена с рациональными коэффициентами степени меньше чем $p-1$.
б). Из центра правильного p-угольника (где p – простое) к его вершинам проведены $p-1$ векторов. Докажите, что они линейно независимы над полем $\boldsymbol{Q}$
Определение 4. Многочлен деления круга – это $\Phi_n(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_k)$, где $x_1,x_2,\ldots x_k$ – все примитивные корни n-й степени из 1.

Упр 12. Вычислите $\Phi_n(x)$ для всех $n<6$.

Теорема 13. $x^n-1=\Phi_a(x)\Phi_b(x)\ldots\Phi_c(x)$, где $a, b, \ldots, c$ – всевозможные делители n.

Упр 14. Докажите, что если p – простое, то $\Phi_p(x)=x^{p-1}+x^{p-2}+\ldots+x+1$.

Задача 15. Найдите $\Phi_n(x)$ для всех $n<18$.

Теорема 16. Все коэффициенты $\Phi_n(x)$ – целые.

Факт. Все многочлены деления круга неприводимы в $\boldsymbol{Z}[x]$.

Для самостоятельного решения

МДК1. Докажите, что различные многочлены деления круга взаимно просты.

МДК2. Докажите, что все коэффициенты $\Phi_n(x)$ расположены симметрично относительно середины.

МДК3. При каких *m* и *n* многочлен $1 + x^m + x^{2m} + \ldots x^{(n-1)m}$ делится на многочлен $1 + x + \ldots + x^{n-1}$?

МДК4. Верно ли, что все коэффициенты многочлена деления круга по модулю не больше 1?

МДК5. Рассматриваются многочлены в $\boldsymbol{Z}[x]$. Докажите, что для любого *неприводимого* $P(x)$, найдется такой $Q(x)$, что $P(Q(x))$ – приводим.

А.В.Шаповалов, апрель 2010 г. www.ashap.info/Uroki/1543/2009-10/index.html