Многочлены: целые значения и коэффициенты

Обозначение. $\mathbf{Z}[x]$ – множество многочленов с целыми коэффициентами, $\mathbf{R}[x]$ – с действительными, $\mathbf{Q}[x]$ – с рациональными.

Упр 1. Пусть $P(x)$ – многочлен с целыми коэффициентами (короче, $P(x)\in \mathbf{Z}[x]$).

а) Докажите, что если a и b – числа одинаковой четности, то $P(a)$ и $P(b)$ – тоже одинаковой четности.

б) Докажите, что если a и b – целые числа, причем $P(a) = 0$ и $P(b) = 1$, то или $a = b + 1$, или $b = a + 1$.

Лемма 2. Если $P(x)\in \mathbf{Z}[x]$, а m и n – целые числа, то $P(m)–P(n)$ делится на $m–n$.

Упр 3. Существует ли многочлен $P(x)\in \mathbf{Z}[x]$, такой, что $P(1)=20$, $P(20)=10$?

Упр 4. Для некоторого многочлена $P(x)\in \mathbf{Z}[x]$ числа $P(0)$ и $P(1)$ четные. Докажите, что для любого целого числа n значение $P(n)$ – четное число.

Зад 5. а) $P(x)=x^2+x+41$. Приведите пример такого натурального n, что $P(n)$ – не простое.

б) Существует ли такой непостоянный многочлен с целыми коэффициентами, у которого все значения в целых точках – простые числа?

Теорема 6. Всякий целый корень приведенного многочлена $x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ с целыми коэффициентами является делителем свободного члена a_n.

Упр 7. Решите уравнения: а) $x^3 + x^2 + x + 6 = 0$, б) $x^3 - 6x^2 + 15x - 14 = 0$.

Теорема 8. а) Пусть несократимая дробь $\dfrac{t}{n}$ – корень многочлена $P(x)=a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\ldots+a_0\in \mathbf{Z}[x]$ (a_m и a_0 не равны 0). Тогда $a_m \,\vdots\, n$, $a_0 \,\vdots\, t$

б) Пусть в пункте (а) старший коэффициент $a_m=1$. Тогда все рациональные корни многочлена $P(x)$ – целые числа.

Упр 9. Найдите все рациональные корни многочленов

а) $x^3 + 2x^2 + 2x + 1$; **б)** $2x^3–3x^2–4x+6$

Зад 10. Разложите многочлены из упр 9 в произведение возможно большего числа непостоянных многочленов **а)** в $\mathbf{Z}[x]$ **б)** $\mathbf{R}[x]$.

Теорема 11. (*без доказательства*). Многочлен с целыми коэффициентами раскладывается на множители в $\mathbf{Z}[x]$ ⇔ он раскладывается в $\mathbf{Q}[x]$.

Зад 12. Многочлен $f(x)\in\boldsymbol{Q}[x]$, и $f(\sqrt{2})=0$. Докажите, что $f(x)$ делится на $x^2–2$.

Домашнее задание

ЦК2. Докажите, что если $P(x)\in \mathbf{Z}[x]$) и $|P(3)| = |P(7)| = 1$, то у $P(x)$ нет целых корней.

ЦК3. Вася пишет на доске квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ с натуральными коэффициентами a, b, c. После этого Петя, если хочет, может заменить один или два знака “+” на “–”. Если у получившегося уравнения оба корня целые, то выигрывает Вася, если же корней нет или хотя бы один из них нецелый – Петя. Может ли Вася подобрать коэффициенты уравнения так, чтобы наверняка выиграть у Пети?

ЦК4. На графике многочлена с целыми коэффициентами отмечены две точки с целыми координатами. Докажите, что если расстояние между ними – целое число, то соединяющий их отрезок параллелен оси абсцисс.

ЦК5. В неравенстве $x^2+px+q>0$ коэффициенты p и q – целые. Неравенство выполнено при всех целых x. Докажите, что оно выполнено при всех действительных x.

ЦК6*. У многочлена $P(x)$ есть отрицательный коэффициент. Могут ли у всех его степеней $P^n(x)$ (где $n > 1$ – целое) все коэффициенты быть положительными?