Многочлены и корни

Определение. *Многочленом* (от x) называется выражение, составленное из букв x и чисел с помощью операций сложения, вычитания и умножения (например, $7x^4+3x^4$, $(1+2x)(3–0,5x)$, $x^3–2x^2+3x–4$). При сложении, вычитании и умножении многочленов снова получается многочлен. Каждый многочлен *единственным* образом может быть записан в *стандартном виде* $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$, где a_i – числа, $a_n\neq0$. Для такого многочлена слагаемое a_nx^n называется *старшим членом*, а n – степенью многочлена. Многочлены равны, если при любом x равны их значения.

Упр1. Не раскрывая скобок, убедитесь, что $(x–1)(x–2)(x–3)(x–4)\neq (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$

Упр2. Может ли при перемножении двух ненулевых многочленов в получиться так, что вообще все члены сократятся друг с другом?

Упр3. В верном равенстве многочленов $(x^2–1)(x+...) = (x–1)(x+3)(x+...)$ два числа стерли и заменили точками. Что это были за числа?

Теорема 4. У многочлена степени n – не более n корней.

Зад5. Произведение четырех последовательных целых чисел равно 7!. Найдите эти числа. Сколько решений имеет задача?

Зад6. Докажите, что

a) если два квадратных трехчлена совпадают в трех точках, то они равны.

b) если два многочлена n-й степени совпадают в n+1 точках, то они равны.

Зад7. Сколько всего корней у многочлена $\frac{(x-3)(x-7)}{(9-3)(9-7)}+\frac{(x-9)(x-7)}{(3-9)(3-7)}+\frac{(x-3)(x-9)}{(7-3)(7-9)}-1$?

Зад8*. Даны два многочлена положительной степени $P(x)$ и $Q(x)$, причём выполнены тождества $P(P(x)) \equiv Q(Q(x))$ и $P(P(P(x))) \equiv Q(Q(Q(x)))$. Обязательно ли тогда выполнено тождество $P(x) = Q(x)$?

Теорема 9. Для каждого $C>0$ найдется такое M, что при $|x|>M$ выполнено $x^n>C(1+x+x^2+...+x^{n-1})$

Теорема 10. У многочлен нечетной степени всегда есть корень.

Зад11. Докажите, что квадрат можно разрезать на три подобных попарно не равных прямоугольника.

Зад12. $P(x)$ – многочлен. Уравнение $P(x)=x$ не имеет корней. Докажите, что уравнение $P(P(x))=x$ тоже не имеет корней.

Зад13. Докажите, что любая натуральная степень многочлена
$P(x) = x^4 + x^3 – 3x^2 + x + 2$ имеет хотя бы один отрицательный коэффициент.

Домашнее задание

М1. Найдите все действительные корни уравнения

$$(x + 1)^{21} +(x + 1)^{20}(x – 1) +(x + 1)^{19}(x – 1)^2 + ... + (x – 1)^{21} = 0.$$

М2. При каком значении a многочлены x^4+ax^2+1 и x^4+ax^3+1 имеют общий корень?

М3. Коэффициенты квадратного уравнения $x^2+px+q=0$ изменили не более чем на 0,01. Мог ли больший корень уравнения измениться больше чем на 1000?

М4. Существует ли квадратный трехчлен, который каждое целое числа вида 11...1 переводит в числа такого же вида?

А.В.Шаповалов, март 2010 г. www.ashap.info/Uroki/1543/2009-10/index.html