

## Непрерывная комбинаторика: процессы и игры

В некоторых задачах возникают комбинации из *конечного* числа объектов, но сами объекты выбираются из *бесконечного* набора, заданного *непрерывным параметром* или параметрами. Кроме того, отношения между объектами и наборами задаются в первую очередь неравенствами. Соответственно, работа с неравенствами и служит главным средством при решении таких задач. В первую очередь это касается неравенства треугольника.

1. Двое играющих по очереди ломают палку: первый – на две части (возможно неравные), второй – одну из получившихся частей на две, первый – одну из трех частей на две, и так далее. Выигрывает тот, кто сможет после какого-то из своих ходов выбрать из всех имеющихся частей 4 палки, длины которых образуют арифметическую прогрессию. Кто из игроков сможет выиграть, как бы ни играл соперник?

Неравенству треугольника не удовлетворяют степени двойки, что помогает строить контрпримеры.

2. Паша ломает палку на 10 частей. Если Тёме удастся из этих частей сложить 10-угольник, он выиграл. Может ли Паша предотвратить выигрыш Тёмы?

Неравенства треугольника помогает делать оценки в геометрических задачах. Подбирая искомый круг, важно правильно поместить центр.

3. Петя рисует на плоскости множество единичных отрезков так, что каждые два имеют общую точку. Докажите, что Вася сможет накрыть все отрезки кругом  
а) радиуса 2; б) радиуса 1,5; в) радиуса 1.

Свойства пятиугольника. Вспомогательный треугольник

4. Некоторый куб рассекли плоскостью так, что в сечении получился пятиугольник. Докажите, что длина одной из сторон этого пятиугольника отличается от 1 метра по крайней мере на 20 сантиметров.

Малое шевеление.

5. За одну операцию разрешается в треугольнике изменить длину одной из сторон (но так, чтоб он остался треугольником).

а) За какое наименьшее число операций можно из правильного треугольника со стороной 1 сделать правильный треугольник со стороной 4?

б) За какое наименьшее число операций можно из правильного треугольника со стороной 100 сделать правильный треугольник со стороной 1?

Степени двойки. Количество комбинаций. Точки на линии.

6. а) Купившему головку сыра весом 3 кг магазин предлагает призовую игру. Покупатель режет головку на 3 куска, а продавец выбирает из этих кусков один или несколько и раскладывает их на одну или на обе чаши весов. При неравновесии продавец обязан за счет магазина добавить призовой кусок сыра, уравнивающий чаши. Продавец старается сделать приз поменьше, а покупатель – побольше. Найдите вес призового куска при наилучших действиях сторон.

б) То же, но головку режут на 4 куска.

Предварительная оценка.

7. Фома и Ерема делят кучу из трех кусков сыра. Сперва Фома, если хочет, выбирает один кусок и режет его на два. Затем он раскладывает куски по два на две тарелки. Затем Ерема выбирает тарелку и берет с нее один кусок, а Фома забирает второй. С другой тарелки первым кусок берет Фома, а Ерема забирает оставшийся. Докажите, что Фома всегда может действовать так, чтобы получить не менее половины сыра (по весу).

### Соответствие.

8. На столе лежат 10 кусков сыра. Петя берет себе самый маленький (по весу) кусок. Затем он режет один из кусков на столе на две части, и снова берет себе самый маленький из получившихся 10 кусков. Эти действия: разрезание и взятие куска – Петя повторяет, пока у него не наберется 9 кусков. Докажите, что Петя возьмет себе не более половины сыра (по весу).

### Перебор с обратным ходом

9. Двое делят кусок сыра. Сначала первый режет сыр на два куска, потом второй – любой из кусков на два. Эти 3 куска они делят между собой: сначала первый берет себе один кусок, потом второй – один из оставшихся кусков, наконец первый забирает оставшийся кусок. Для каждого игрока выяснить, какое наибольшее количество сыра он может себе гарантировать, как бы ни действовал его соперник.

## Домашнее задание

**НКПро1.** Фома и Ерема делят кучу из кусков сыра. Сперва Фома, если хочет, выбирает один кусок и и режет его на два. Затем он раскладывает сыр на две кучки. Затем Ерема выбирает кучку для дележки, и они ее делят, беря себе по очереди по куску, первый Ерема. Точно так же они делят и вторую кучку, только первым выбирает Фома.

Докажите, что Фома всегда может действовать так, чтобы получить не менее половины сыра (по весу).

**НКПро2.** Двое играющих по очереди ломают палку: первый на две части, затем второй ломает любой из кусков на две части, затем первый – любой из кусков на две части, и т.д. Один из игроков выигрывает, если сможет после какого-то из своих ходов сложить из 6 кусков два равных треугольника. Может ли другой ему помешать?

**НКПро3.** Двое делят кусок сыра. Сначала первый режет сыр на два куска, потом второй – любой из кусков на два, и так далее, пока не получится 5 кусков. Затем первый берет себе один кусок, потом второй – один из оставшихся кусков, потом снова первый – и так, пока куски не закончатся. Для каждого игрока выяснить, какое наибольшее количество сыра он может себе гарантировать, как бы ни действовал его соперник.